Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

13. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 13.1 Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und sei

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty), \quad x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Sei

$$\mathrm{SO}(n) := \left\{ A \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ und } \det(A) = 1 \right\}$$

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) $\mathrm{SO}(n) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \|Ax\| = \|x\| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \det(A) = 1\}$.

(b) $\mathrm{SO}(n) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) : A^T = A^{-1} \text{ und } \det(A) = 1\}$.

(c) $\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} : \phi \in \mathbb{R} \right\}$, d. h., $\mathrm{SO}(2)$ ist die Menge aller Drehmatrizen in $M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

(d) Mit der Matrixmultiplikation ist $\mathrm{SO}(n)$ eine Gruppe.

Wir erweitern jetzt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zum Hermiteschen Standardskalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$$

auf $\mathbb{C}^n$. Sei

$$\mathrm{U}(n) := \left\{ A \in M(n \times n, \mathbb{C}) : \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{C}^n \right\}$$

(e) $\mathrm{SO}(n)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{U}(n)$.

Sei $A \in \mathrm{SO}(n)$.

(f) Alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A erfüllen $|\lambda| = 1$.

(g) Wenn $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist $\overline{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.

(h) Wenn V ein Unterraum von $\mathbb{C}^n$ ist, sodass $A(V) \subseteq V$, dann gilt $A(V^\perp) = V^\perp$.

(i) Wenn $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A ist, dann ist $V = \mathrm{span}\{v, \overline{v}\}$ ein Unterraum, der $A(V) \subseteq V$ erfüllt.

Sei V ein zweidimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Wir nennen $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Drehmatrix in der Ebene V, falls es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V gibt, sodass

- $A(V) \subseteq V$,

- ${}_{\mathcal{B}}[A|_V]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$ für ein $\phi \in \mathbb{R}$,
- $A|_{V^\perp} = \mathrm{id}_{V^\perp}$.

(j) Es existieren Unterräume $V_1, \ldots, V_m$ von $\mathbb{R}^n$, sodass

- $A(V_k) \subseteq V_k$ für alle k,
- Entweder $A|_{V_k} = \mathrm{id}_{V_k}$ oder $\dim(V_k) = 2$ und $A|_{V_k}$ is eine Drehung in der Ebene V_k.
- $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$.
- Für alle $1 \leq k, l \leq m$ und alle $v \in V_k$ und $w \in V_l$ gilt $\langle v, w \rangle = 0$, falls $k \neq l$.

(k) Jedes Element von $\mathrm{SO}(n)$ ist das Produkt endlich vieler (kommutierender) Drehmatrizen.

Hausaufgabe 13.1 Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei

$$\mathrm{O}(n) := \left\{ A \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Für $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sei

$$\rho_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x - 2\frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} v.$$

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) Es gilt

$$\rho_v(tv + w) = -tv + w \qquad (t \in \mathbb{R}, w \in (\mathbb{R}v)^\perp),$$

d.h. ρ_v ist die Spiegelung in $(\mathbb{R}v)^\perp$.

Sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$.

(b) Für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $R_v := {}_{\mathcal{E}}[\rho_v]_{\mathcal{E}} \in \mathrm{O}(n)$.

(c) Sei $\mathcal{B} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$. Wenn $v = af_1 + bf_2$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a^2 + b^2 = 1$, dann

$${}_{\mathcal{B}}[\rho_v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -a^2 + b^2 & -2ab & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -2ab & a^2 - b^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ linear unabhängig. Dann ist $R_{v_1} R_{v_2}$ eine Drehmatrix in der Ebene $\mathrm{span}(\{v_1, v_2\})$.

(e) Jede Drehmatrix in $M(n \times n, \mathbb{R})$ ist das Produkt zweier Spiegelungsmatrizen.

(f) Wenn $A \in \mathrm{O}(n)$, dann $\det(A) = \pm 1$.

(g) $\det(R_v) = -1$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(h) Wenn $A \in \mathrm{O}(n)$ mit $\det(A) = -1$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dann $R_v A \in \mathrm{SO}(n)$.

(i) Jedes Element in $\mathrm{O}(n)$ ist das Produkt endlich vieler Spiegelungsmatrizen.

Abgabe der Hausaufgaben: bis Freitag, 31.1.2025 in Panda.