Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

13. Übungsblatt – Lösungen

Hausaufgabe 13.1 Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei

$$\mathrm{O}(n) := \big\{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n\big\}$$

Für $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sei

$$\rho_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2} v.$$

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) Es gilt

$$\rho_v(tv + w) = -tv + w \qquad (t \in \mathbb{R}, w \in (\mathbb{R}v)^\perp),$$

d.h. ρ_v ist die Spiegelung in $(\mathbb{R}v)^\perp$.
Beweis: Seien $t \in \mathbb{R}$ und $w \in (\mathbb{R}v)^\perp$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\rho_v(tv + w) &= tv + w - 2\frac{\langle tv + w, v\rangle}{\|v\|^2} v = tv + w - 2\frac{t\langle v, v\rangle + \langle w, v\rangle}{\|v\|^2} v \\ &= tv + w - 2\frac{t\|v\|^2}{\|v\|^2} v = tv + w - 2tv = -tv + w.\end{aligned}$$

Sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$.

(b) Für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $R_v := {}_{\mathcal{E}}[\rho_v]_{\mathcal{E}} \in \mathrm{O}(n)$.
Beweis: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned}\langle R_v x, R_v y\rangle = \langle \rho_v(x), \rho_v(y)\rangle &= \left\langle x - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2} v, y - 2\frac{\langle y, v\rangle}{\|v\|^2} v\right\rangle \\ &= \langle x, y\rangle - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2}\langle v, y\rangle - 2\frac{\langle y, v\rangle}{\|v\|^2}\langle x, v\rangle + 4\frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2}\frac{\langle y, v\rangle}{\|v\|^2}\langle v, v\rangle \\ &= \langle x, y\rangle - 2\frac{\langle x, v\rangle\langle y, v\rangle}{\|v\|^2} - 2\frac{\langle x, v\rangle\langle y, v\rangle}{\|v\|^2} + 4\frac{\langle x, v\rangle\langle y, v\rangle}{\|v\|^4}\|v\|^2 = \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

(c) Sei $\mathcal{B} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$. Wenn $v = af_1 + bf_2$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a^2 + b^2 = 1$, dann

$${}_{\mathcal{B}}[\rho_v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -a^2 + b^2 & -2ab & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -2ab & a^2 - b^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$ und sei $v = af_1 + bf_2$. Es gilt

$$\begin{aligned}\rho_v(f_1) &= f_1 - 2\frac{\langle f_1, af_1 + bf_2\rangle}{\|af_1 + bf_2\|^2}(af_1 + bf_2) = f_1 - 2\frac{a^2}{a^2 + b^2} f_1 - 2\frac{ab}{a^2 + b^2} f_2 = (-a^2 + b^2) f_1 - 2ab f_2 \\ \rho_v(f_2) &= f_2 - 2\frac{\langle f_2, af_1 + bf_2\rangle}{\|af_1 + bf_2\|^2}(af_1 + bf_2) = f_2 - 2\frac{ab}{a^2 + b^2} f_1 - 2\frac{b^2}{a^2 + b^2} f_2 = -2ab f_1 + (a^2 - b^2) f_2 \\ \rho_v(f_k) &= f_k - 2\frac{\langle f_k, af_1 + bf_2\rangle}{\|af_1 + bf_2\|^2}(af_1 + bf_2) = f_k \qquad (3 \le k \le n).\end{aligned}$$

(d) Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ linear unabhängig. Dann ist $R_{v_1}R_{v_2}$ eine Drehmatrix in der Ebene $\operatorname{span}(\{v_1, v_2\})$.
Beweis: Für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$R_{tv}x = \rho_{tv}(x) = x - 2\frac{\langle x, tv\rangle}{\|tv\|^2}tv = x - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2}v = \rho_v(x) = R_v x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Es folgt, dass $R_{tv} = R_v$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir darum annehmen, dass $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$.

Wenn $v_1 \in \mathbb{R}v_2$, dann folgt

$$R_{v_1}R_{v_2}x = R_{v_1}R_{v_1}x = \rho_{v_1}\circ\rho_{v_1}(x) = x - \big\langle x - \langle x, v_1\rangle v_1, v_1\big\rangle v_1 = x - \langle x, v_1\rangle v_1 + \langle x, v_1\rangle\langle v_1, v_1\rangle v_1 = x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Darum ist $R_{v_1}R_{v_2} = E$ die Einheitsmatrix. Die Einheitsmatrix ist eine Drehungsmatrix.

Nehmen wir nun an, dass $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind und $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ erfüllen. Seien

$$f_1 := v_1 \quad \text{und} \quad f_2 := \frac{1}{\|v_2 - \langle v_1, v_2\rangle v_1\|}\big(v_2 - \langle v_1, v_2\rangle v_1\big).$$

Sei $\{f_3, \dots, f_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\big(\operatorname{span}(\{v_1, v_2\})\big)^\perp$. Dann ist $\mathcal{B} := \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $v_2 = af_1 + bf_2$. Da $\|v_2\| = 1$, gilt $a^2 + b^2 = 1$. Nach (c) gilt

$$_{\mathcal{B}}[\rho_{v_1}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad {}_{\mathcal{B}}[\rho_{v_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -a^2 + b^2 & -2ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2ab & a^2 - b^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

und darum

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{B}}[\rho_{v_1} \circ \rho_{v_2}]_{\mathcal{B}} &= {}_{\mathcal{B}}[\rho_{v_1}]_{\mathcal{B}}\,{}_{\mathcal{B}}[\rho_{v_2}]_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a^2 + b^2 & -2ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2ab & a^2 - b^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2ab & a^2 - b^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

Weil

$$(a^2 - b^2)^2 + (-2ab)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 = 1,$$

gibt es ein $\phi \in \mathbb{R}$, sodass $a^2 - b^2 = \cos(\phi)$ und $-2ab = \sin(\phi)$. Es folgt, dass

$$_{\mathcal{B}}[\rho_{v_1} \circ \rho_{v_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $R_{v_1} R_{v_2} = {}_{\mathcal{E}}[\rho_{v_1} \circ \rho_{v_2}]_{\mathcal{E}}$ eine Drehmatrix in der Ebene $\operatorname{span}(\{f_1, f_2\}) = \operatorname{span}(\{v_1, v_2\})$.

(e) Jede Drehmatrix in $M(n \times n, \mathbb{R})$ ist das Produkt zweier Spiegelungsmatrizen.
Beweis: Sei A eine Drehmatrix. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$ und ein $\phi \in \mathbb{R}$, sodass

$$_{\mathcal{B}}[A]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & \cdots & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Seien $v_1 := f_1$ und $v_2 := \cos(\phi/2) f_1 - \sin(\phi/2) f_2$. Dann gilt nach (1), dass

$$\begin{aligned} _{\mathcal{B}}[\rho_{v_1} \circ \rho_{v_2}]_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} \cos(\phi/2)^2 - \sin(\phi/2)^2 & -2\cos(\phi/2)\sin(\phi/2) & 0 & \cdots & 0 \\ 2\cos(\phi/2)\sin(\phi/2) & \cos(\phi/2)^2 - \sin(\phi/2)^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & \cdots & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = {}_{\mathcal{B}}[A]_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $A = {}_{\mathcal{E}}[\rho_{v_1} \circ \rho_{v_2}]_{\mathcal{E}} = R_{v_1} R_{v_2}$.

(f) Wenn $A \in \mathrm{O}(n)$, dann $\det(A) = \pm 1$.
Beweis: Sei $A \in \mathrm{O}(n)$. Wie in Präsenzaufgabe 13.1(b) gilt $A^T = A^{-1}$. Darum gilt

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

und damit $\det(A)^2 = 1$. Weil $\det(A) \in \mathbb{R}$, folgt $\det(A) = \pm 1$, .

(g) $\det(R_v) = -1$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Beweis: Sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Sei $\{f_2, \dots, f_n\}$ eine Basis von $(\mathbb{R}v)^\perp$ und sei $\mathcal{B} = \{v, f_2, f_3, \dots, f_n\}$. Dann gilt

$$\det(R_v) = \det\left({}_{\mathcal{B}}[\rho_v]_{\mathcal{B}}\right) = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

(h) Wenn $A \in \mathrm{O}(n)$ mit $\det(A) = -1$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dann $R_v A \in \mathrm{SO}(n)$.
Beweis: Sei $A \in \mathrm{O}(n)$ mit $\det(A) = -1$ und sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Nach (b) gilt $R_v \in \mathrm{O}(n)$. Es folgt

$$(R_v A)^T = A^T R_v^T = A^{-1} R_v^{-1} = (R_v A)^{-1}$$

und damit $R_v A \in \mathrm{O}(n)$. Nach (g) gilt weiter

$$\det(R_v A) = \det(R_v)\det(A) = (-1)^2 = 1.$$

Es folgt, dass $R_v A \in \mathrm{SO}(n)$.

(i) Jedes Element in $\mathrm{O}(n)$ ist das Produkt endlich vieler Spiegelungsmatrizen.
Beweis: Sei $A \in \mathrm{O}(n)$. Wenn $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dann gilt $R_v A \in \mathrm{SO}(n)$ nach (h). Nach Präsenzaufgabe 13.1 (k) gibt es endlich viele Drehmatrizen $D_1, \ldots, D_m \in \mathrm{SO}(n)$, sodass $R_v A = D_1 \cdots D_m$. Darum gilt $A = R_v D_1 \cdots D_m$. Die Behauptung folgt nun aus (e).