Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Lineare Algebra 1

13. Übungsblatt – Lösungen

Präsenzaufgabe 13.1 Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und sei

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty), \quad x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Sei

$$\mathrm{SO}(n) := \left\{ A \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ und } \det(A) = 1 \right\}$$

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) $\mathrm{SO}(n) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \|Ax\| = \|x\| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \det(A) = 1\}$.
Beweis: Sei $A \in \mathrm{SO}(n)$. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

und damit $\|Ax\| = \|x\|$. Sei jetzt $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, sodass $\|Ax\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wenn $x, y \in \mathbb{R}^n$, dann

$$\begin{aligned}\langle Ax, Ay \rangle &= \frac{1}{2}\Big(\langle A(x+y), A(x+y) \rangle - \langle Ax, Ax \rangle - \langle Ay, Ay \rangle\Big) = \frac{1}{2}\Big(\|A(x+y)\|^2 - \|Ax\|^2 - \|Ay\|^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\Big) = \frac{1}{2}\Big(\langle x+y, x+y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle\Big) = \langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

(b) $\mathrm{SO}(n) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) : A^T = A^{-1} \text{ und } \det(A) = 1\}$.
Beweis: Wenn $A \in \mathrm{SO}(n)$, dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle A^T Ax - x, y \rangle = \langle A^T Ax, y \rangle - \langle x, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle - \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle = 0.$$

Insbesondere gilt $\|A^T Ax - x\|^2 = \langle A^T Ax - x, A^T Ax - x \rangle = 0$ und damit $A^T Ax = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Es folgt, dass $A^T = A^{-1}$. Wenn $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ und $A^T = A^{-1}$, dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle A^T Ax, y \rangle = \langle A^{-1} Ax, y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

(c) $\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} : \phi \in \mathbb{R} \right\}$, d. h., $\mathrm{SO}(2)$ ist die Menge aller Drehmatrizen in $M(2 \times 2, \mathbb{R})$.
Beweis: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Die Matrix A ist genau dann ein Element von $\mathrm{SO}(2)$, wenn $A^T = A^{-1}$ und $\det(A) = 1$. Diese Bedingungen sind gleichbedeutend mit $a = d$, $b = -c$ und $ad - bc = 1$. Daher gilt

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a^2 + b^2 = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} : \phi \in \mathbb{R} \right\}.$$

(d) Mit der Matrixmultiplikation ist $\mathrm{SO}(n)$ eine Gruppe.
Beweis: Wenn $A, B \in \mathrm{SO}(n)$, dann gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$ und $(AB)^T = B^T A^T = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$. Es folgt, dass $AB \in \mathrm{SO}(n)$. Die Identitätsmatrix E ist enthalten in $\mathrm{SO}(n)$, denn $E^T = E = E^{-1}$. Wenn $A \in \mathrm{SO}(n)$, dann auch $A^{-1} \in \mathrm{SO}(n)$, denn $(A^{-1})^T = (A^T)^T = A = (A^{-1})^{-1}$. Da Matrixmultiplikation assoziativ ist, folgt, dass $\mathrm{SO}(n)$ mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.

Wir erweitern jetzt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zum Hermiteschen Standardskalarprodukt

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$$

auf $\mathbb{C}^n$. Sei

$$\mathrm{U}(n) := \big\{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) : \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{C}^n\big\}$$

(e) $\mathrm{SO}(n)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{U}(n)$.
Beweis: Es reicht zu zeigen, dass $\mathrm{SO}(n) \subseteq \mathrm{U}(n)$. Sei $A \in \mathrm{SO}(n)$. Weil $A_{i,j} \in \mathbb{R}$ für alle $1 \le i, j \le n$, gilt

$$A^\dagger = \overline{A}^T = A^T = A^{-1}.$$

Darum gilt

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, A^\dagger Ay\rangle = \langle x, A^{-1}Ay\rangle = \langle x, y\rangle$$

für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$. Es folgt, dass $A \in \mathrm{U}(n)$.

Sei $A \in \mathrm{SO}(n)$.

(f) Alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A erfüllen $|\lambda| = 1$.
Beweis: Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert und $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Es gilt

$$|\lambda| = \frac{\|\lambda v\|}{\|v\|} = \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1.$$

(g) Wenn $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist $\overline{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.
Beweis: Sei v ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Dann gilt $A_{i,j} \in \mathbb{R}$ für alle $1 \le i, j \le n$ und darum

$$(A\overline{v})_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\overline{v_j} = \sum_{j=1}^{n} \overline{A_{i,j}}v_j = \overline{\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}v_j} = \overline{(Av)_i} = \overline{\lambda v_i} = \overline{\lambda}\overline{v_i} = \overline{\lambda}\overline{v}_i \qquad (1 \le i \le n).$$

Es folgt, dass $\overline{v}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ ist.

(h) Wenn V ein Unterraum von $\mathbb{C}^n$ ist, sodass $A(V) \subseteq V$, dann gilt $A(V^\perp) = V^\perp$.
Beweis: Weil $\det(A) = 1 \neq 0$, ist A invertierbar. Darum ist $A(V)$ ein Unterraum von V der Dimension $\dim\big(A(V)\big) = \dim(V)$. Es folgt, dass $A(V) = V$ und damit $V = A^{-1}\big(A(V)\big) = A^{-1}(V)$. Sei $w \in V^\perp$. Da $A \in U(n)$ gilt für alle $v \in V$

$$\langle Aw, v\rangle = \langle w, A^\dagger v\rangle = \langle w, A^{-1}v\rangle.$$

Weil $A^{-1}v \in V$, folgt $\langle Aw, v\rangle = 0$. Dies zeigt, dass $A(V^\perp) \subseteq V^\perp$. Weil A invertierbar ist, folgt, dass $A(V^\perp)$ ein Unterraum von $V^\perp$ der Dimension $\dim(V^\perp)$ ist. Dies beweist, dass $A(V^\perp) = V^\perp$.

(i) Wenn $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A ist, dann ist $V = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{v, \overline{v}\}$ ein Unterraum, der $A(V) \subseteq V$ erfüllt.
Beweis: Wenn v ein Eigenvektor ist, dann ist nach (g) auch $\overline{v}$ ein Eigenvektor. Darum gilt $Av \in \mathbb{C}v$ und $A\overline{v} \in \mathbb{C}\overline{v}$. Es folgt $A\big(\mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\{v, \overline{v}\})\big) \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\{v, \overline{v}\})$.

Sei V ein zweidimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Wir nennen $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Drehmatrix in der Ebene V, falls es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V gibt, sodass

- $A(V) \subseteq V$,
- ${}_{\mathcal{B}}[A|_V]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$ für ein $\phi \in \mathbb{R}$,
- $A|_{V^\perp} = \mathrm{id}_{V^\perp}$.

(j) Es existieren Unterräume $V_1, \ldots, V_m$ von $\mathbb{R}^n$, sodass

- $A(V_k) \subseteq V_k$ für alle k,
- Entweder $A|_{V_k} = \mathrm{id}_{V_k}$ oder $\dim(V_k) = 2$ und $A|_{V_k}$ is eine Drehung in der Ebene V_k.
- $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$.
- Für alle $1 \leq k, l \leq m$ und alle $v \in V_k$ und $w \in V_l$ gilt $\langle v, w \rangle = 0$, falls $k \neq l$.

Beweis: Wir beweisen zunächst, dass es Eigenvektoren $w_1, \ldots, w_m$ von A gibt, sodass

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\{w_j, \overline{w_j}\}) \quad \text{und} \quad \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\{w_j, \overline{w_j}\}) \perp \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\{w_k, \overline{w_k}\}), \text{ falls } j \neq k. \tag{1}$$

Sei $W_1 = \mathbb{C}^n$. Jedes nicht-konstante Polynom über $\mathbb{C}$ hat eine Nullstelle. Daher hat A einen Eigenwert λ_1. Sei $w_1 \in W_1$ ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ_1. Nach (h) und (i) ist $W_2 := W_1 \cap \big(\mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\{w_1, \overline{w_1}\})\big)^\perp$ ein Unterraum, sodass $A(W_2) = W_2$. Wenn $\dim_{\mathbb{C}}(W_2) \neq 0$, dann hat $A|_{W_2}$ einen Eigenwert λ_2. Sei $w_2 \in W_2$ ein Eigenvektor mit Eigenwert λ_2 und setzte $W_3 := W_2 \cap \big(\mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\{w_2, \overline{w_2}\})\big)^\perp$. Wir wiederholen diese Konstruktion und erhalten so die Eigenvektoren $w_1, \ldots, w_m$ von A, so dass (1) gilt.

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die Eigenwerte der Eigenvektoren $w_1, \ldots, w_m$. Nach (f) gilt $|\lambda_j| = 1$. Wenn $\lambda_j \notin \mathbb{R}$, dann haben w_j und $\overline{w_j}$ unterschiedliche Eigenwerte und darum $\dim_{\mathbb{C}}(W_j) = 2$. Wenn $\lambda_j \in \mathbb{R}$, dann gilt $\lambda_j = \pm 1$ und $1 \leq \dim(W_j) \leq 2$. Aus dem obigen folgt, dass es eine Basis von Eigenvektoren von A für $\mathbb{C}^n$ gibt. Daher ist die Determinante von A gleich dem Produkt aller mit Multiplizität gezählten Eigenwerte. Darum gilt

$$\det(A) = \left(\prod_{j \text{ mit } \lambda_j = -1} (-1)^{\dim(V_j)} \right) \left(\prod_{j \text{ mit } \lambda_j = 1} 1^{\dim(V_j)} \right) \left(\prod_{j \text{ mit } \lambda_j \notin \mathbb{R}} \lambda_j \overline{\lambda_j} \right) = (-1)^N,$$

wobei $N := \dim\big(E_A(-1)\big)$. Da $\det(A) = 1$, ist $\dim\big(E_A(-1)\big)$ gerade. Wir können darum die Eigenvektoren w_j mit Eigenwert gleich -1 so wählen, dass $\overline{w_j}$ senkrecht auf w_j steht. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir daher annehmen, dass $\dim(W_j) = 2$, wenn $\lambda_j = -1$.

Für $1 \leq j \leq m$ seien $R_j := \frac{1}{2}(w_j + \overline{w_j})$, $I_j := \frac{i}{2}(w_j - \overline{w_j})$ und $V_j = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\{R_j, I_j\})$. Dann $V_j = W_j \cap \mathbb{R}^n$. Weil $w_j \neq 0$ und $\overline{w_j} \neq 0$, ist $V_j \neq \{0\}$. Da die Unterräme W_j senkrecht aufeinander stehen, gilt $V_j \perp V_k$, falls $j \neq k$. Die (reelle) Dimension von V_j ist $\dim_{\mathbb{R}}(V_j) = \dim_{\mathbb{C}}(W_j)$. Darum ist $V_1 + V_2 + \cdots + V_m$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ der (reellen) Dimension $\sum_j \dim_{\mathbb{R}}(V_j) = \sum_j \dim_{\mathbb{C}}(W_j) = n$. Es folgt, dass

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m.$$

Da $|\lambda_j| = 1$ gibt es $\phi_j \in \mathbb{R}$, sodass $\lambda_j = \cos(\phi_j) + i\sin(\phi_j)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
AR_j &= \frac{1}{2}(Aw_j + A\overline{w_j}) = \frac{1}{2}\lambda_j w_j + \frac{1}{2}\overline{\lambda_j}\overline{w_j} = \frac{1}{2}\lambda_j(R_j - iI_j) + \frac{1}{2}\overline{\lambda_j}(R_j + iI_j) \\
&= \frac{1}{2}(\lambda_j + \overline{\lambda}_j)R_j + \frac{1}{2i}(\lambda_j - \overline{\lambda_j})I_j = \mathrm{Re}(\lambda_j)R_j + \mathrm{Im}(\lambda_j)I_j = \cos(\phi_j)R_j + \sin(\phi_j)I_j, \\
AI_j &= \frac{i}{2}(Aw_j - A\overline{w_j}) = \frac{i}{2}\lambda_j w_j - \frac{i}{2}\overline{\lambda_j}\overline{w_j} = \frac{i}{2}\lambda_j(R_j - iI_j) - \frac{i}{2}\overline{\lambda_j}(R_j + iI_j) \\
&= \frac{i}{2}(\lambda_j - \overline{\lambda}_j)R_j + \frac{1}{2}(\lambda_j + \overline{\lambda_j})I_j = -\mathrm{Im}(\lambda_j)R_j + \mathrm{Re}(\lambda_j)I_j = -\sin(\phi_j)R_j + \cos(\phi_j)I_j.
\end{aligned}$$

Sei $1 \leq j \leq m$ fest. Wenn $\lambda_j \notin \mathbb{R}$, dann gilt

$$\lambda_j\langle w_j, \overline{w_j}\rangle = \langle \lambda_j w_j, \overline{w_j}\rangle = \langle Aw_j, \overline{w_j}\rangle = \langle w_j, A^{-1}\overline{w_j}\rangle = \langle w_j, \overline{\lambda_j}^{-1}\overline{w_j}\rangle = \lambda_j^{-1}\langle w_j, \overline{w_j}\rangle = \overline{\lambda_j}\langle w_j, \overline{w_j}\rangle.$$

Für die letzte Gleichheit haben wir verwendet, dass $\lambda_j\overline{\lambda_j} = |\lambda_j|^2 = 1$. Weil $\lambda_j \neq \overline{\lambda_j}$ folgt $\langle w_j, \overline{w_j}\rangle = 0$. Die Vektoren R_j und I_j sind beide ungleich 0 und

$$\langle R_j, I_j\rangle = \frac{1}{2}\frac{-i}{2}\langle w_j + \overline{w_j}, w_j - \overline{w_j}\rangle = \frac{-i}{4}\left(\|w_j\|^2 - \|\overline{w_j}\|^2\right) = 0.$$

Dies zeigt, dass die Einschränkung von A auf V_j eine Drehung in V_j ist.

Wenn $\lambda_j = -1$, dann stehen w_j und $\overline{w_j}$ per Annahme senkrecht auf einander. Es folgt, dass $\dim(V_j) = 2$. Die Einschränkung von A auf V_j wird gegeben durch Multiplikation mit -1 und ist damit eine Drehung in V_j.

Wenn $\lambda_j \in \mathbb{R}$ und $\lambda_j \neq -1$, dann $\lambda_j = 1$ und $A|_{V_j} = \mathrm{id}_{V_j}$.

(k) Jedes Element von $\mathrm{SO}(n)$ ist das Produkt endlich vieler (kommutierender) Drehmatrizen.
Beweis: Sei $A \in \mathrm{SO}(n)$ und seien $V_1, \ldots, V_m$ wie in (j). Für $1 \leq j \leq m$ sei $\phi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$\phi_j(x + y) = Ax + y \qquad (x \in V_j, y \in V_j^\perp)$$

Dann gilt

$$Av = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_m(v) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ und setze $A_j := {}_{\mathcal{E}}[\phi_j]_{\mathcal{E}}$. Dann ist A_j eine Drehmatrix in der Ebene V_j, falls $\dim(V_j) = 2$ und $A_j = E$ ist die Einheitsmatrix, falls $\dim(V_j) = 1$. Es gilt

$$A = {}_{\mathcal{E}}[\phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_m]_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{E}}[\phi_1]_{\mathcal{E}}\,{}_{\mathcal{E}}[\phi_2]_{\mathcal{E}} \cdots {}_{\mathcal{E}}[\phi_m]_{\mathcal{E}} = A_1 A_2 \cdots A_m.$$