

## Klausur Lineare Algebra 1

Name:
Matrikelnummer:

### Wichtige Informationen:

- Als Hilfsmittel ist alles in Papierform erlaubt. Elektronische Hilfsmittel sind verboten.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben mit insgesamt 100 Punkten.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein. Begründen Sie alle Ihre Antworten!

---

1	2	3	4	5	6	7	Summe

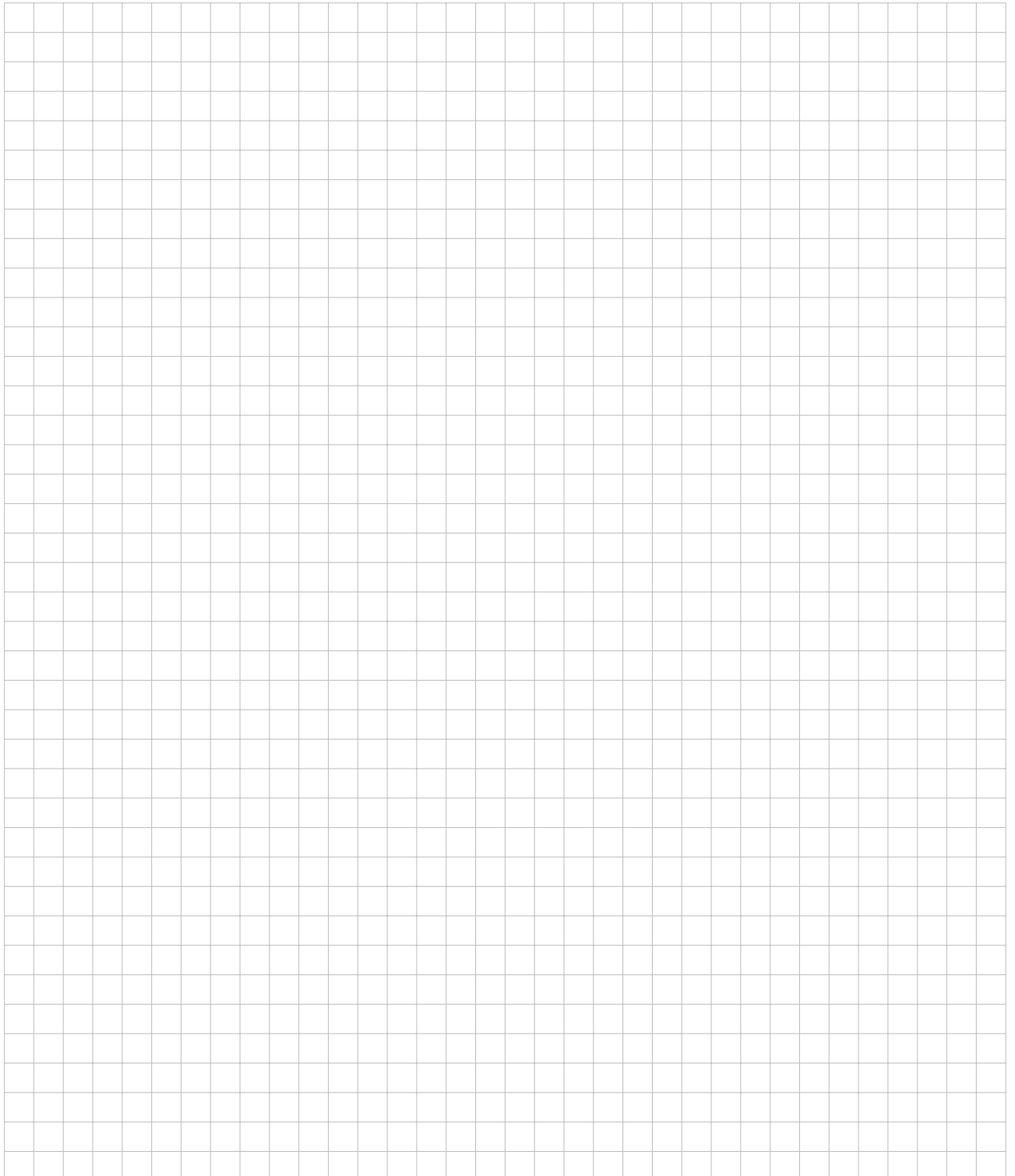
**Aufgabe 1:** (15 Punkte)

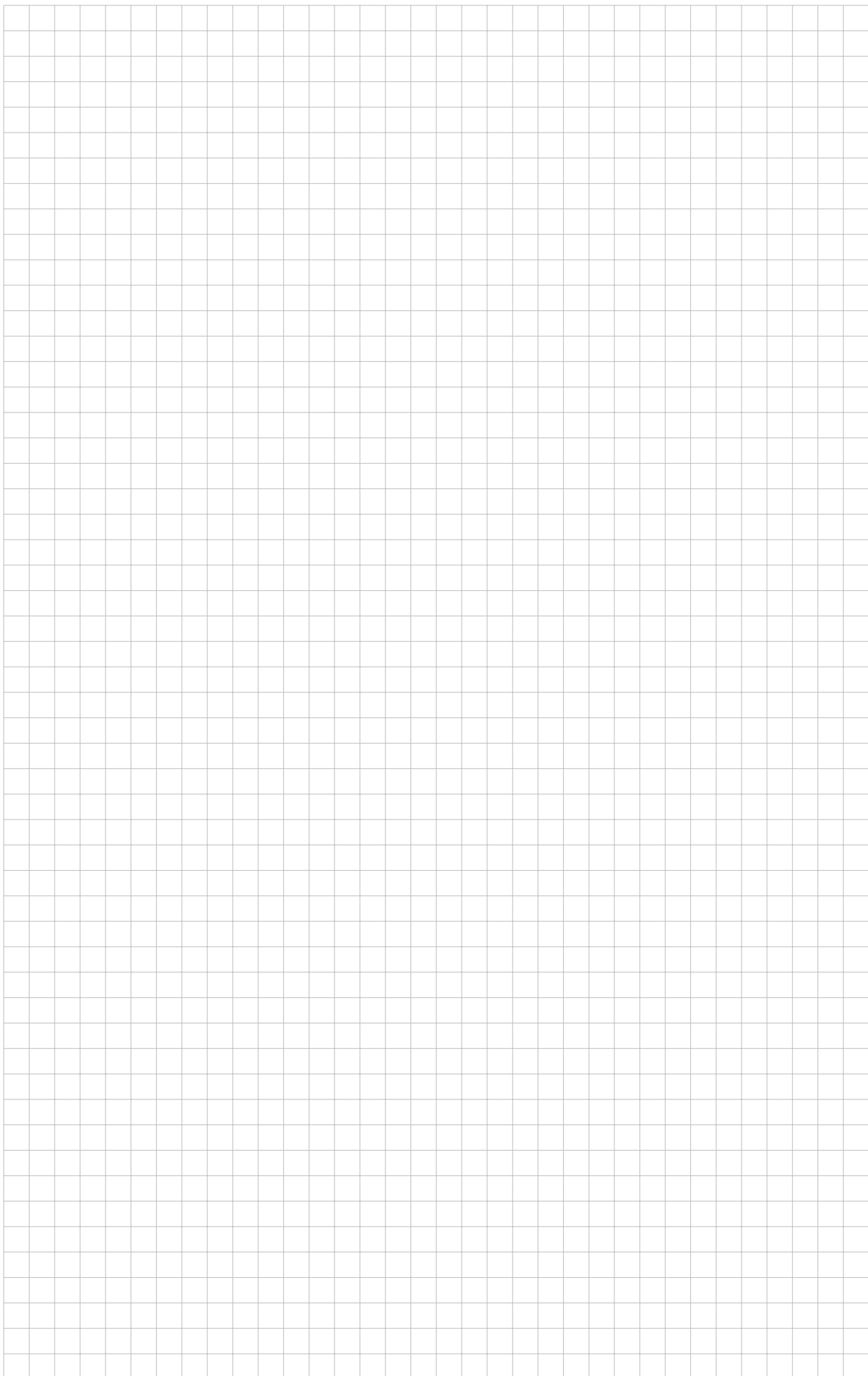
Sei  $(G, \star)$  eine abelsche Gruppe und

$$\Phi : G \rightarrow G, \quad x \mapsto x \star x.$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $\Phi$  ein Gruppenhomomorphismus ist. (5 Pt.)
- (b) Geben Sie drei Beispiele von Gruppen  $(G, \star)$ , für welche  $\Phi$  ein Isomorphismus ist. (5 Pt.)
- (c) Geben Sie drei Beispiele von Gruppen  $(G, \star)$ , für welche  $\Phi$  weder injektiv noch surjektiv ist. (5 Pt.)

*Hinweis: Zu jedem Körper  $(K, +, \cdot)$  sind auf natürliche Art und Weise zwei abelsche Gruppen assoziiert.*





**Aufgabe 2:** (15 Punkte)

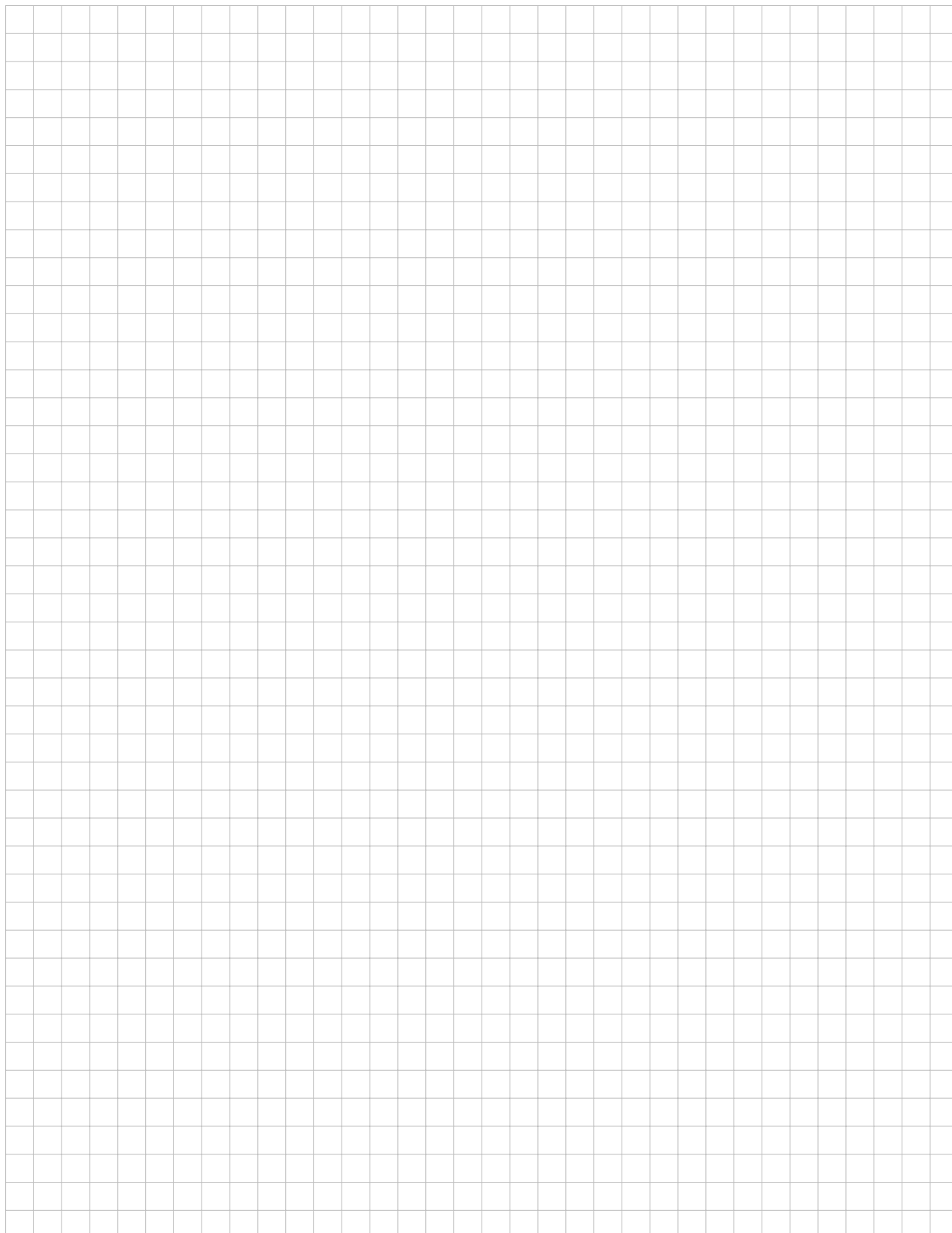
Seien  $a, b \in \mathbb{C}$  und  $A = \begin{pmatrix} a & b & 2025 & 252 \\ b & a & 2520 & 5202 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$ .

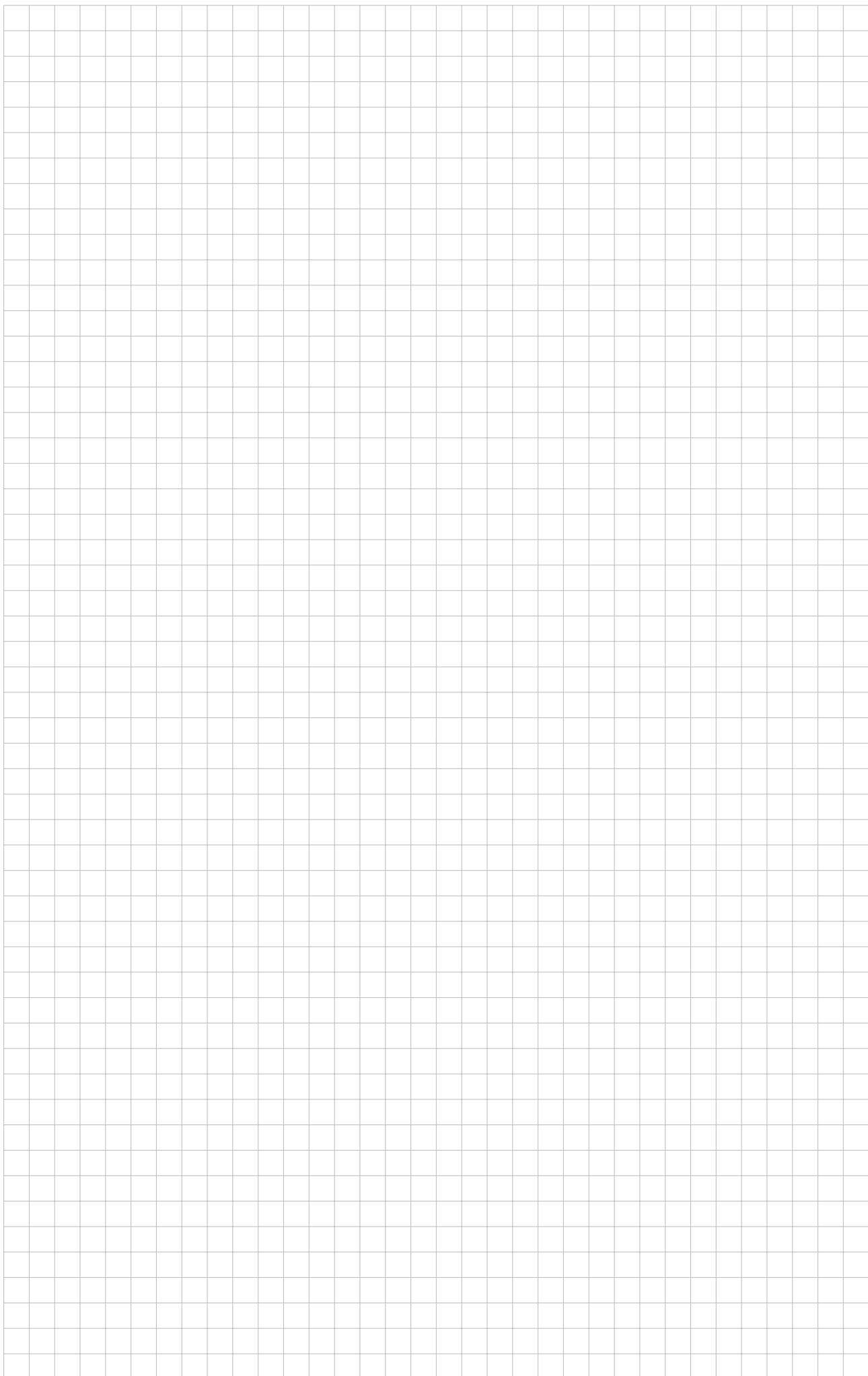
(a) Für welche  $a, b \in \mathbb{C}$  ist  $A$  invertierbar?

(8 Pt.)

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A$ .

(7 Pt.)





**Aufgabe 3:** (15 Punkte)

Sei  $V = \text{Pol}(\mathbb{R})$ . Geben Sie ein Beispiel einer linearen Abbildung  $T : V \rightarrow V$ , welche

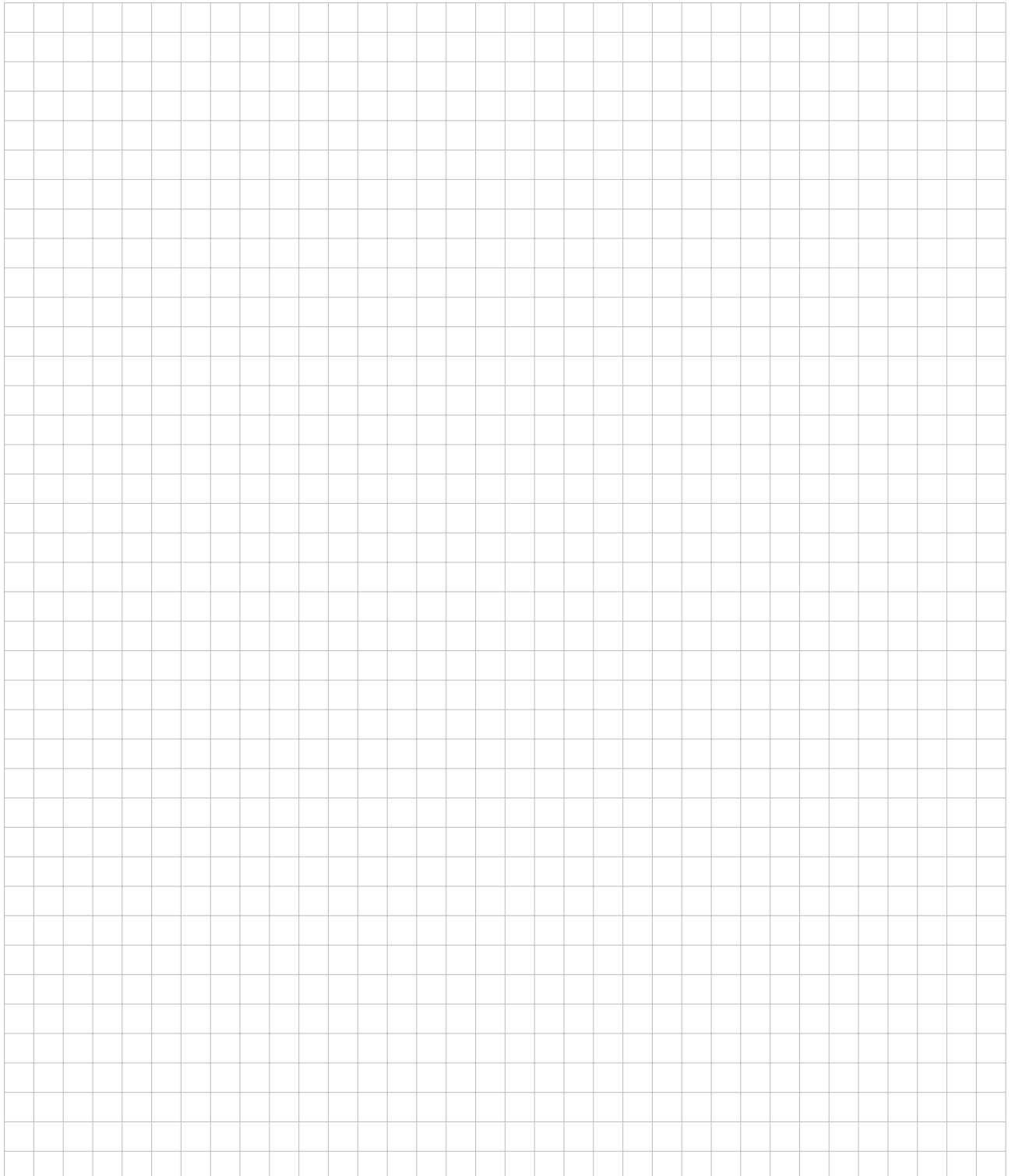
(a) injektiv, aber nicht surjektiv ist. (5 Pt.)

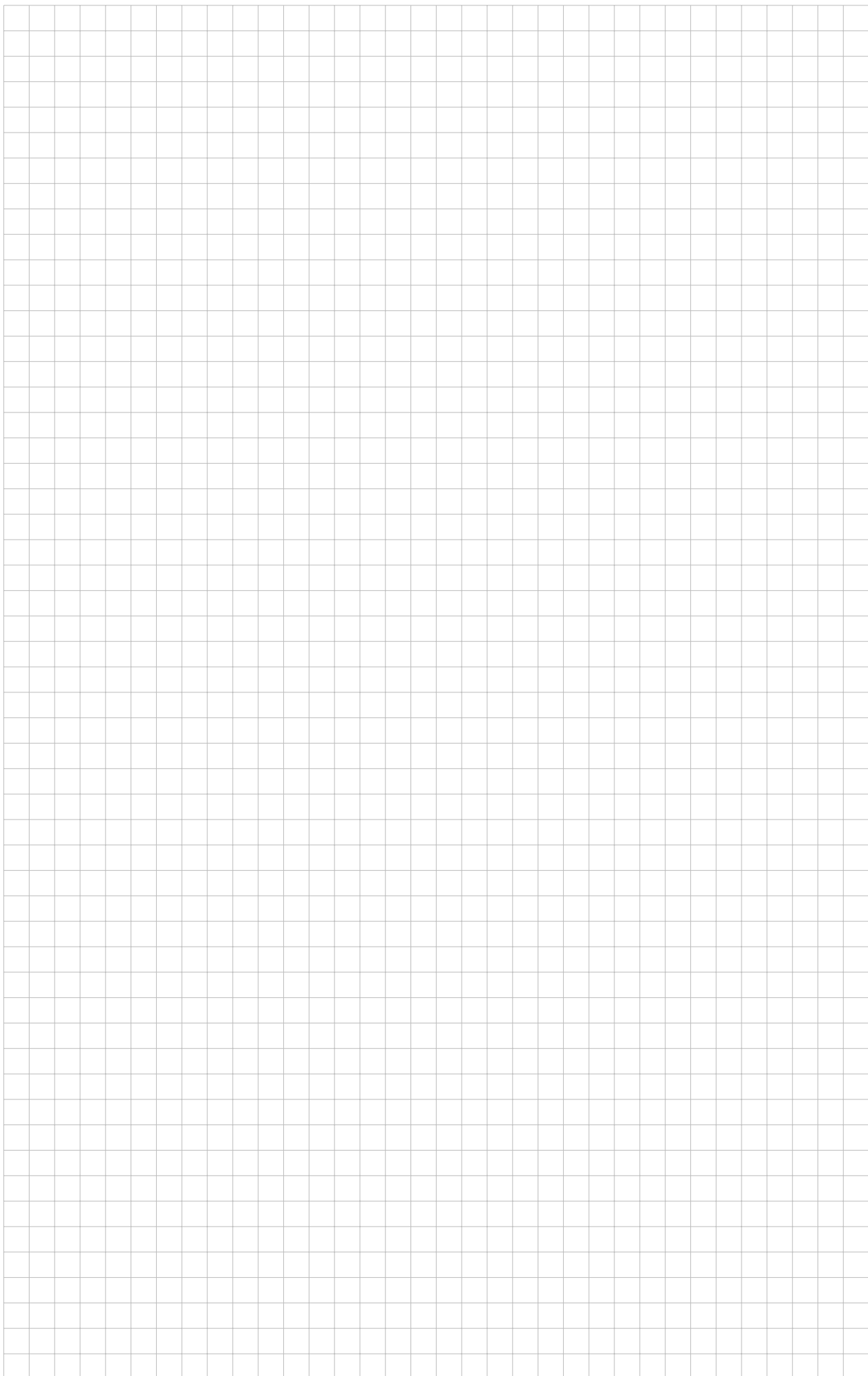
(b) surjektiv, aber nicht injektiv ist. (5 Pt.)

*Hinweis zu (a) und (b): Polynomfunktionen kann man ableiten und auch miteinander multiplizieren.*

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $W = \{p \in \text{Pol}(\mathbb{R}) : \deg(p) \leq n\}$ .

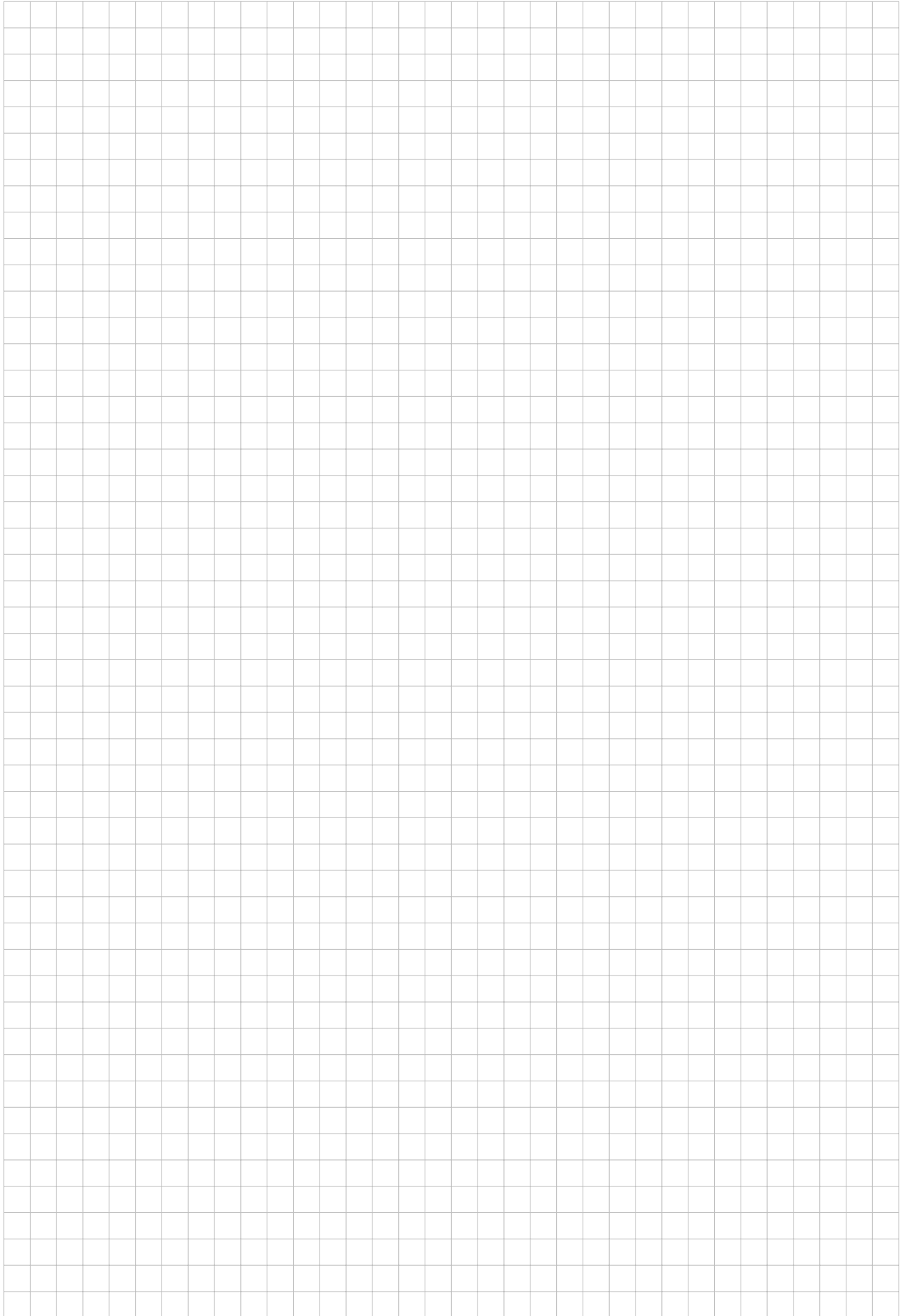
(c) Warum ist jede injektive lineare Abbildung  $T : W \rightarrow W$  surjektiv? (5 Pt.)



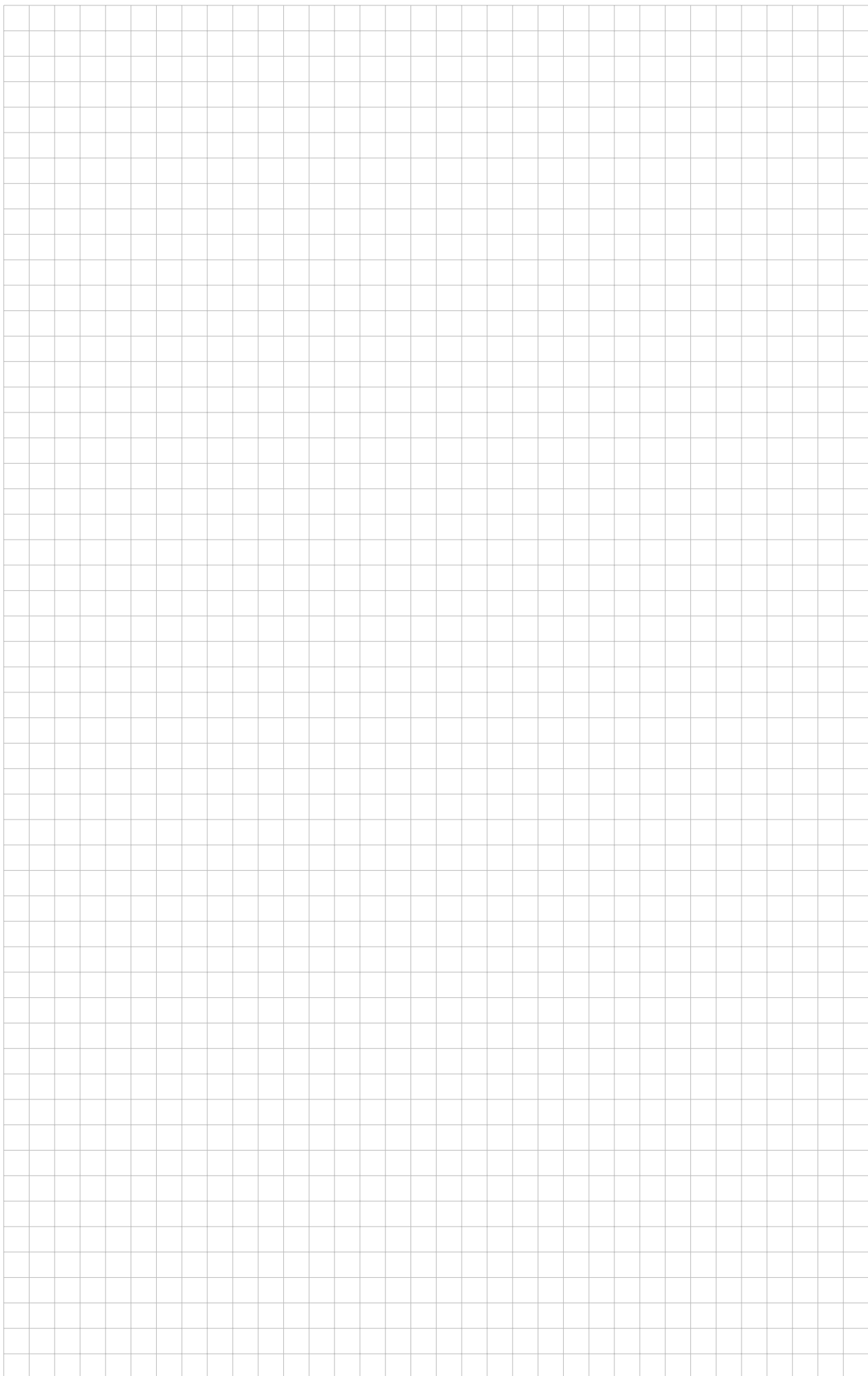


**Aufgabe 4:** (10 Punkte)

Sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein Vektorraum über  $K$ . Sei  $T : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung mit  $T \circ T = T$ . Zeigen Sie, dass  $V = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$ .







**Aufgabe 5:** (20 Punkte)

Sei  $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Betrachten Sie die Elemente  $f_1, f_2, f_3 \in V$ , die für  $x \in \mathbb{R}$  gegeben sind durch

$$f_1(x) = e^{-x^2/2}, \quad f_2(x) = xe^{-x^2/2}, \quad f_3(x) = x^2e^{-x^2/2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass  $f_1, f_2$  und  $f_3$  linear unabhängig sind. (5 Pt.)

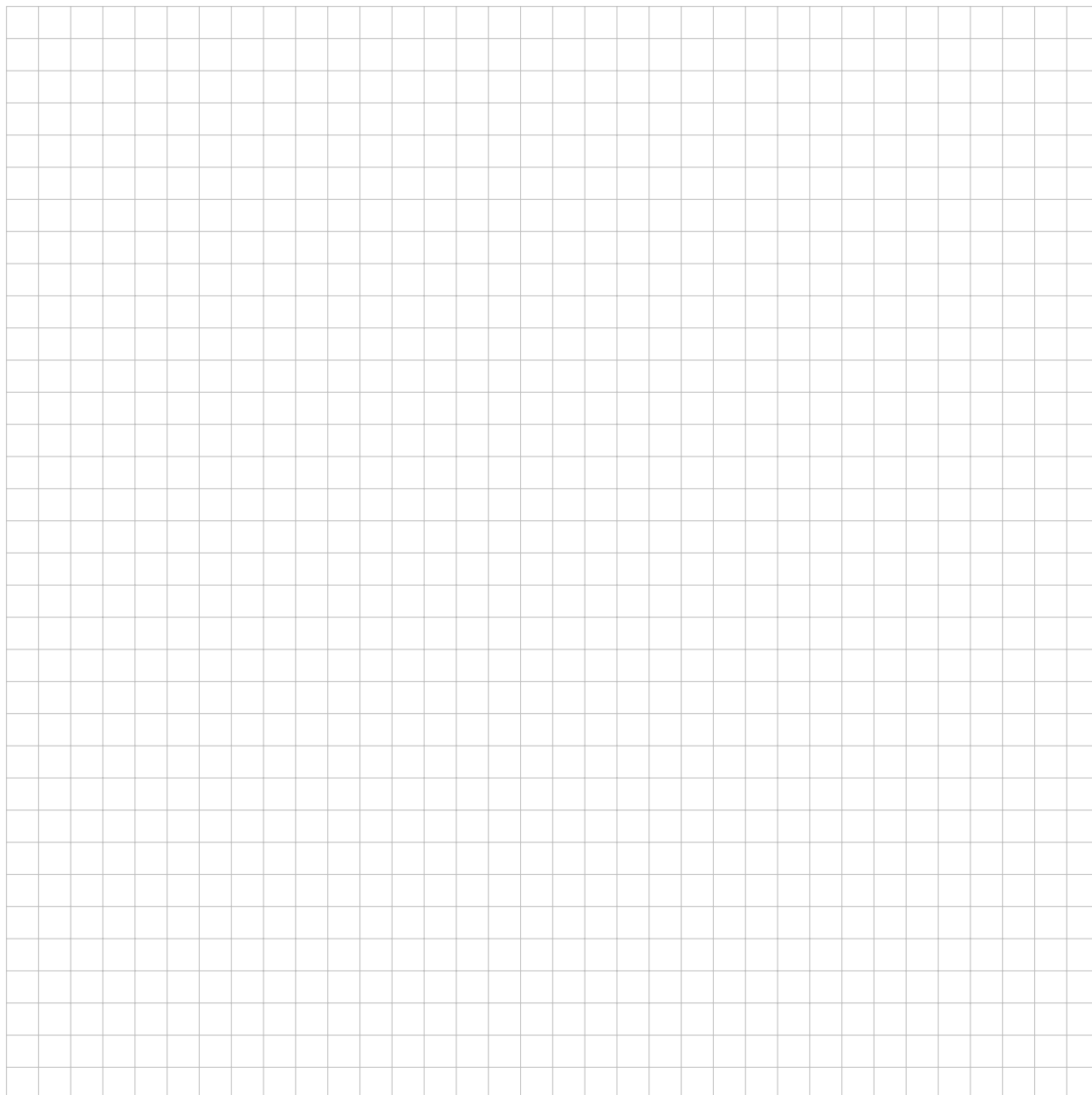
(b) Sei  $V = \text{span}_{\mathbb{R}}\{f_1, f_2, f_3\}$  mit Basis  $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ . Betrachten Sie die lineare Abbildung  $T : V \rightarrow V$ , die gegeben ist durch

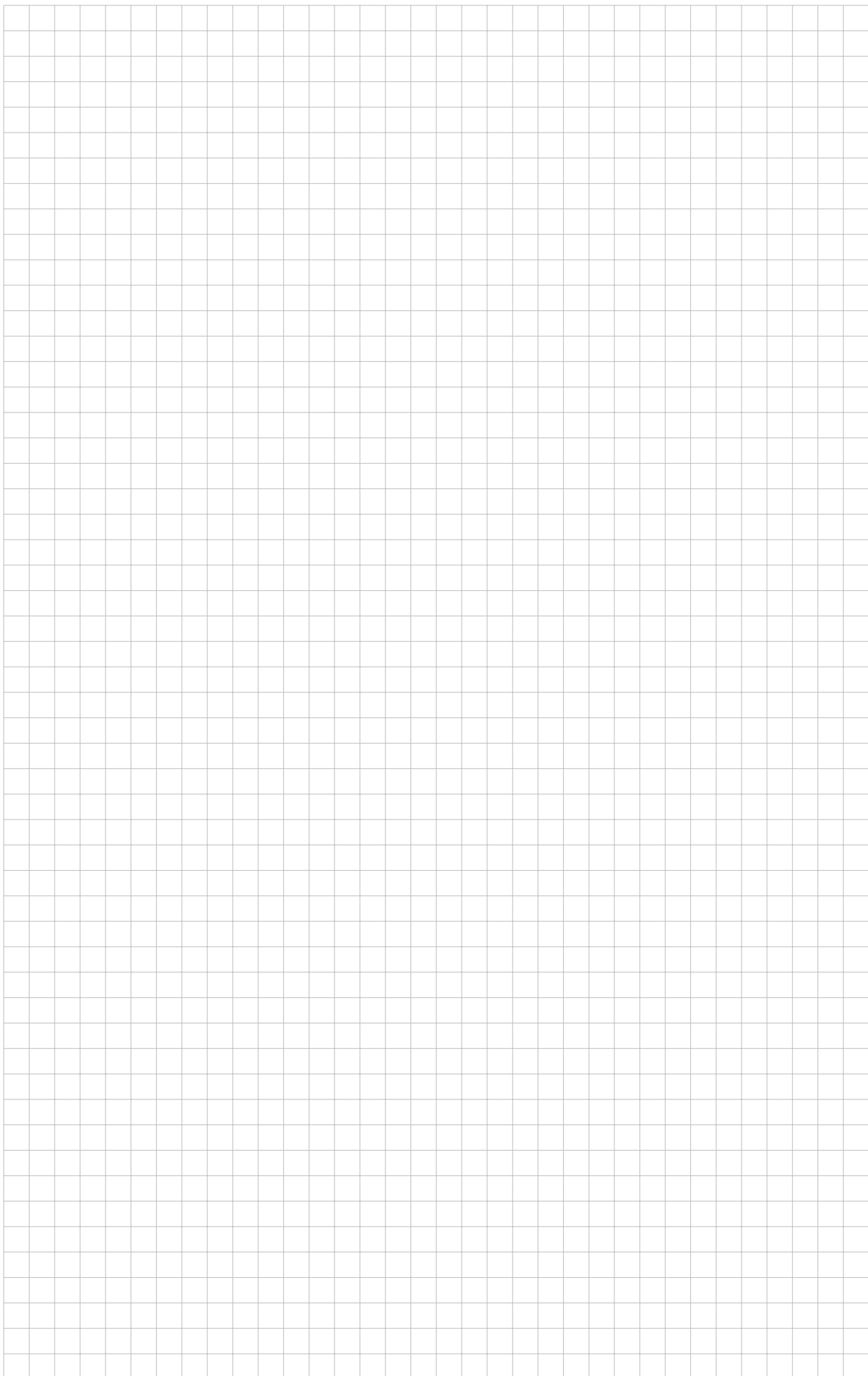
$$Tf(x) = x^2f(x) - f''(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Drücken Sie  $Tf_i$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$  als Linearkombinationen von  $f_1, f_2$  und  $f_3$  aus und erstellen Sie die Darstellungsmatrix  $A = {}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$ . (9 Pt.)

*Hinweis:*  $A$  is von der Form  $A = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & d \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$  mit  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  paarweise verschieden und  $d \in \mathbb{R}$ .

(c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von  $T$ . (6 Pt.)





**Aufgabe 6:** (15 Punkte)

Betrachten Sie das reelle Gleichungssystem (I)–(IV), wobei

(I)  $x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16$ ,

(II)  $5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 = -16$ ,

(III)  $8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = -16$ ,

(IV)  $2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 16$ .

(a) Seien  $u = x_1 + x_4$  und  $v = x_2 + x_3$ . Zeigen Sie, dass (I)–(IV) das Gleichungssystem (A)–(B) induziert, wobei

(A)  $6u + 10v = 0$ ,

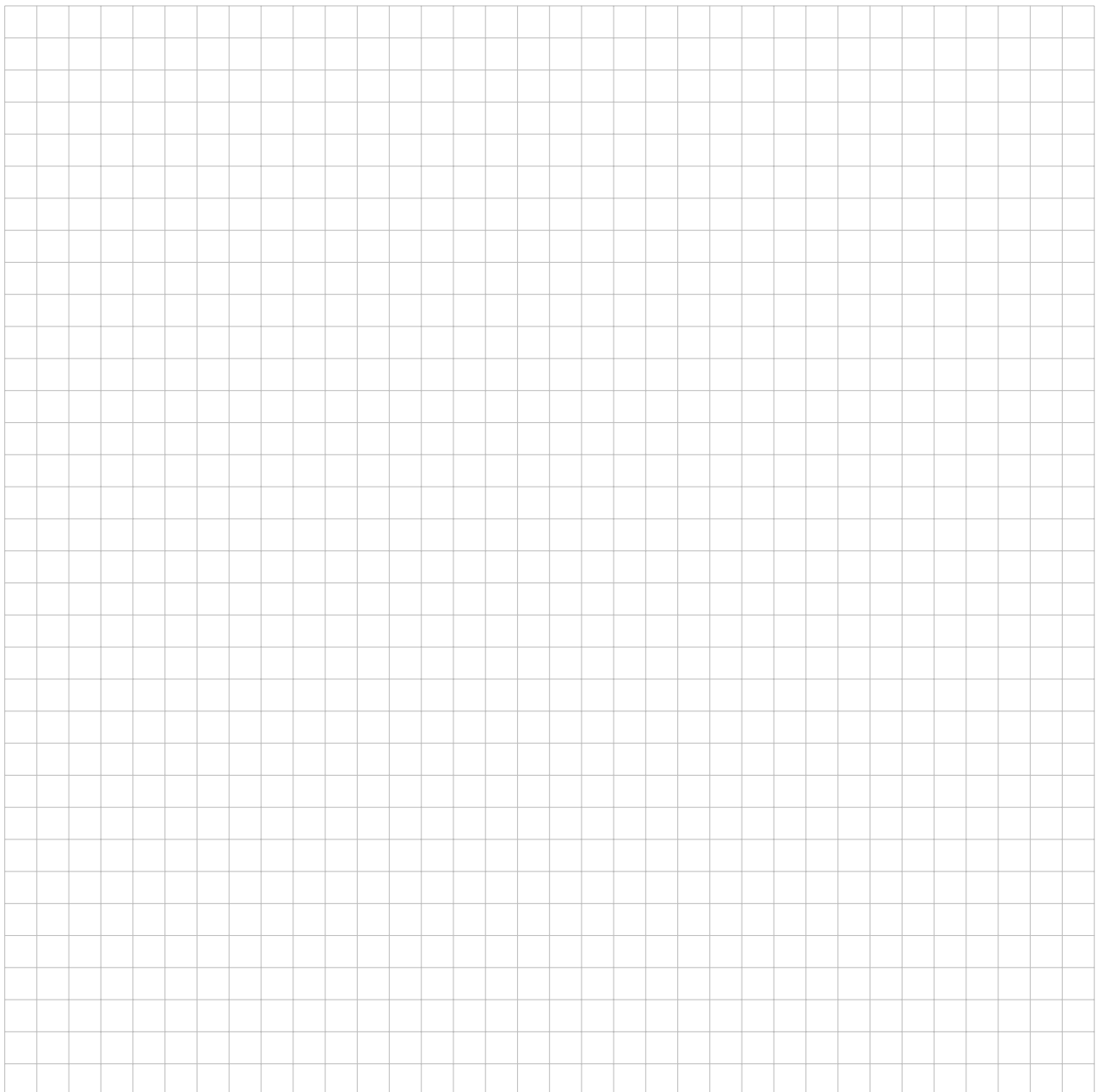
(B)  $10u + 10v = 0$

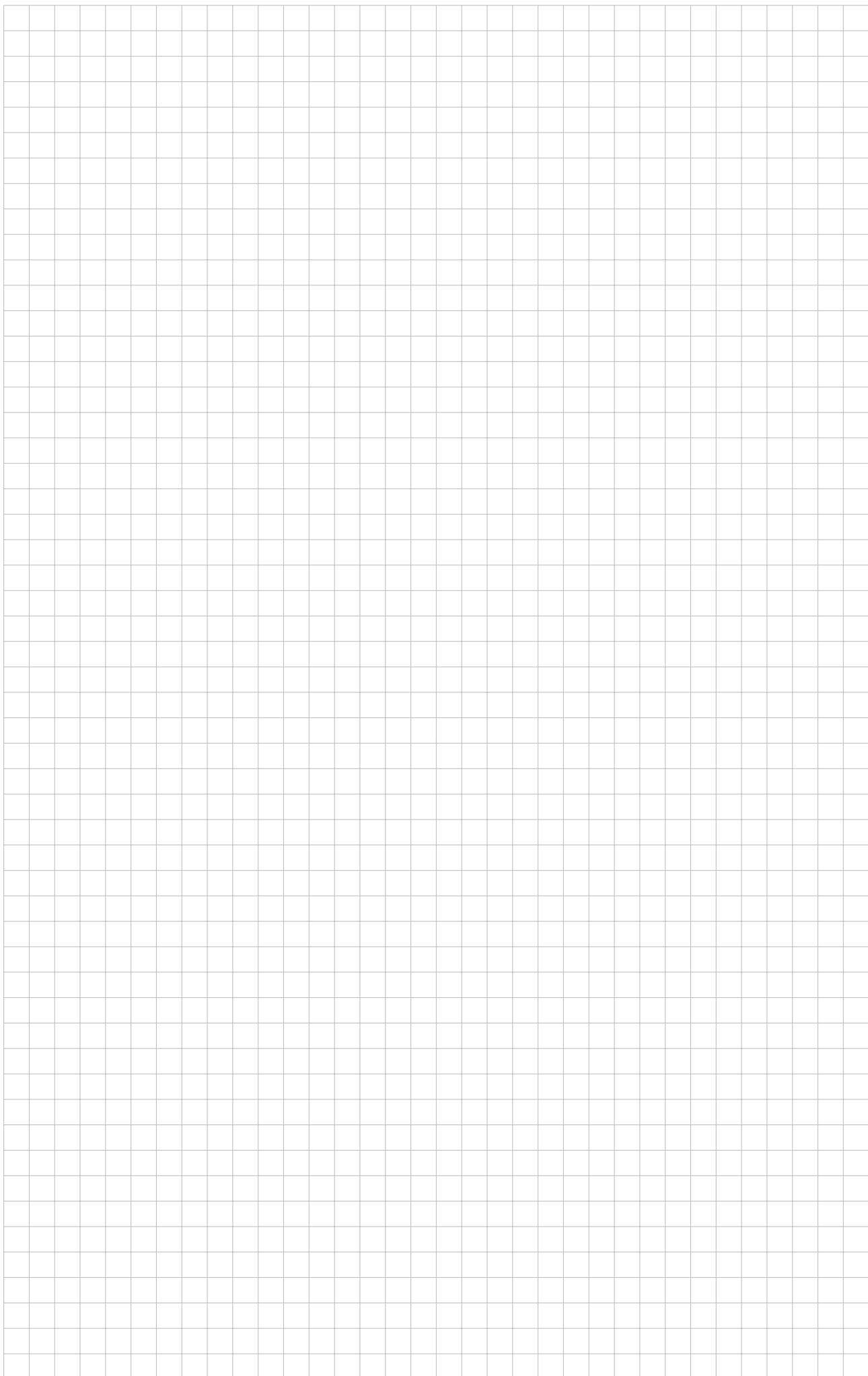
und folgern Sie  $u = v = 0$ .

(8 Pt.)

(b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen von (I)–(IV).

(7 Pt.)





**Aufgabe 7:** (10 Punkte)

Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  und  $p(x) = x^{n-1} - 1 \in \text{Pol}(\mathbb{R})$ .

- (a) Zeigen Sie durch direkte Rechnung oder via vollständiger Induktion, dass  $p(x) = (x-1)q(x)$  mit (5 Pt.)

$$q(x) = x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1.$$

- (b) Zeigen Sie, dass  $(n-1)^2$  ein Teiler von  $n^{n-1} - 1$  ist.

*Hinweis: Bestimmen Sie  $q(n) \bmod (n-1)$ .*

(5 Pt.)

