Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Klausur
Lineare Algebra 1

Name:

Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Als Hilfsmittel ist alles in Papierform erlaubt. Elektronische Hilfsmittel sind verboten.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben mit insgesamt 100 Punkten.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein. Begründen Sie alle Ihre Antworten!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Summe**

Aufgabe 1: (15 Punkte)

Sei $(G, \star)$ eine abelsche Gruppe und

$$\Phi : G \to G, \quad x \mapsto x \star x.$$

(a) Zeigen Sie, dass Φ ein Gruppenhomomorphismus ist. (5 Pt.)

(b) Geben Sie drei Beispiele von Gruppen $(G, \star)$, für welche Φ ein Isomorphismus ist. (5 Pt.)

(c) Geben Sie drei Beispiele von Gruppen $(G, \star)$, für welche Φ weder injektiv noch surjektiv ist. (5 Pt.)

Hinweis: Zu jedem Körper $(K, +, \cdot)$ sind auf natürliche Art und Weise zwei abelsche Gruppen assoziiert.

Aufgabe 2: (15 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{C}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b & 2025 & 252 \\ b & a & 2520 & 5202 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$.

(a) Für welche $a, b \in \mathbb{C}$ ist A invertierbar? (8 Pt.)

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A. (7 Pt.)

Aufgabe 3: (15 Punkte)

Sei $V = \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$. Geben Sie ein Beispiel einer linearen Abbildung $T : V \to V$, welche

(a) injektiv, aber nicht surjektiv ist. (5 Pt.)

(b) surjektiv, aber nicht injektiv ist. (5 Pt.)

Hinweis zu (a) und (b): Polynomfunktionen kann man ableiten und auch miteinander multiplizieren.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $W = \{p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) : \deg(p) \leq n\}$.

(c) Warum ist jede injektive lineare Abbildung $T : W \to W$ surjektiv? (5 Pt.)

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Sei $T : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $T \circ T = T$. Zeigen Sie, dass $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

Aufgabe 5: (20 Punkte)

Sei $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Betrachten Sie die Elemente $f_1, f_2, f_3 \in V$, die für $x \in \mathbb{R}$ gegeben sind durch

$$f_1(x) = e^{-x^2/2}, \qquad f_2(x) = xe^{-x^2/2}, \qquad f_3(x) = x^2 e^{-x^2/2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f_1, f_2 und f_3 linear unabhängig sind. (5 Pt.)

(b) Sei $V = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{f_1, f_2, f_3\}$ mit Basis $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$. Betrachten Sie die lineare Abbildung $T : V \to V$, die gegeben ist durch

$$Tf(x) = x^2 f(x) - f''(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Drücken Sie Tf_i für $i \in \{1, 2, 3\}$ als Linearkombinationen von f_1, f_2 und f_3 aus und erstellen Sie die Darstellungsmatrix $A = {}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$. (9 Pt.)

Hinweis: A is von der Form $A = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & d \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$ *mit* $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ *paarweise verschieden und* $d \in \mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von T. (6 Pt.)

Aufgabe 6: (15 Punkte)
Betrachten Sie das reelle Gleichungssystem (I)–(IV), wobei

(I) $x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16,$

(II) $5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 = -16,$

(III) $8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = -16,$

(IV) $2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 16.$

(a) Seien $u = x_1 + x_4$ und $v = x_2 + x_3$. Zeigen Sie, dass (I)–(IV) das Gleichungssystem (A)–(B) induziert, wobei

(A) $6u + 10v = 0,$

(B) $10u + 10v = 0$

und folgern Sie $u = v = 0$. (8 Pt.)

(b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen von (I)–(IV). (7 Pt.)

Aufgabe 7: (10 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $p(x) = x^{n-1} - 1 \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie durch direkte Rechnung oder via vollständiger Induktion, dass p(x)=(x-1)q(x) mit (5 Pt.)

$$q(x) = x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1.$$

(b) Zeigen Sie, dass $(n-1)^2$ ein Teiler von $n^{n-1} - 1$ ist.

Hinweis: Bestimmen Sie $q(n) \bmod (n-1)$. (5 Pt.)