Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

Probeklausur
Lineare Algebra 1

Name:

Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Als Hilfsmittel ist alles in Papierform erlaubt. Elektronische Hilfsmittel sind verboten.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
- Die Probeklausur besteht aus vier Aufgaben mit insgesamt 40 Punkten. Man hat bestanden, wenn man mindestens 13 Punkte hat. (In der eigentlichen Modulprüfung sind 50 % der Punkte zum Bestehen erforderlich.)
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein. Begründen Sie alle Ihre Antworten!

1	**2**	**3**	**4**	**Summe**

Aufgabe 1: (15 Punkte)

Sind die folgenden Behauptungen richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort entweder mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

(a) Sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $g \in G$. Dann ist die Abbildung

$$\tau_g : G \to G, \quad x \mapsto g \star x$$

eine Bijektion.

(b) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien X, Y Unterräume. Dann ist $X \cup Y$ ein Unterraum von V.

(c) Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien X und Y Unterräume von W. Dann gilt $T^{-1}(X + Y) = T^{-1}(X) + T^{-1}(Y)$.

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und sei $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) = \{f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) : \deg(f) \leq n\}$. Bestimmen Sie das Bild und den Kern der linearen Abbildung

$$D : \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}), \quad p \mapsto p^{(k)},$$

wobei $p^{(k)}$ die k-te Ableitung der Polynomfunktion p ist.

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Bestimmen Sie alle $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$ für welche die Matrix

$$A_{\mu,\lambda} := \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und berechnen Sie für diese μ und λ die inverse Matrix.

Aufgabe 4: (7 Punkte)

Betrachten Sie $V = \mathbb{C}^2$ als einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Basis und damit die reelle Dimension von V.

Bonusaufgabe : (15 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Wir setzen $V_0 := V$ und definieren rekursiv $V_k := T(V_{k-1})$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $V_n = V_N$ für alle $n \geq N$.