Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2024–2025

2. Probeklausur
Lineare Algebra 1

Name:

Matrikelnummer:

Wichtige Informationen:

- Als Hilfsmittel ist alles in Papierform erlaubt. Elektronische Hilfsmittel sind verboten.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
- Die Probeklausur besteht aus drei Aufgaben mit insgesamt 40 Punkten. Man hat bestanden, wenn man mindestens 13 Punkte hat. (In der eigentlichen Modulprüfung sind 50 % der Punkte zum Bestehen erforderlich.)
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein. Begründen Sie alle Ihre Antworten!

1	**2**	**3**	**Summe**

Aufgabe 1: (15 Punkte)

Sind die folgenden Behauptungen richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort entweder mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

(a) Sei $(G, \star)$ eine Gruppe und $g \in G$. Dann ist die Abbildung

$$C_g : G \to G, \quad x \mapsto g \star x \star g^{-1}$$

eine Bijektion.

(b) Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Es gibt $A, B \in M(n \times n, K)$ sodass $AB - BA = E$ die Einheitsmatrix ist.

(c) Sei V ein 13-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und seien X und Y Unterräume von V. Wenn $\dim(X) = 5$ und $\dim(Y) = 7$, dann gilt $\dim(X + Y) \geq 11$.

Aufgabe 2: (15 Punkte)
Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = M(2\times 2, \mathbb{R})$ mit Basis $\mathcal{B} := \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ gegeben durch

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei T die lineare Abbildung

$$T : V \to V, \quad X \mapsto [X_1, X] := X_1X - XX_1.$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von T.

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Sie K ein Körper und $\alpha, \beta, \gamma \in K$. Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\det(A)$.

(b) Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta, \gamma \in K$, für welche A invertierbar ist.