

Lineare Algebra 1: Klausur 1

Bitte füllen Sie zunächst das Deckblatt aus und lesen Sie die folgenden Hinweise.

Nachname:	
Vorname:	
Matrikel-Nummer:	
Studiengang:	

1. Bitte legen Sie **Studierendenausweis** (Matrikel-Nummer) und **Lichtbildausweis** zur Kontrolle auf dem Tisch bereit. Bitte schalten Sie ihr **Handy** still/aus und legen es außer Reichweite ab.
2. Erlaubte **Hilfsmittel** sind lediglich Schreibutensilien (kein Rotstift, kein Bleistift).
3. Bitte melden Sie sich (Handzeichen), falls Sie eine Textformulierung nicht verstehen oder **zusätzliches Papier** für die Bearbeitung einer Aufgabe benötigen. Versehen Sie zusätzliches Papier immer mit Ihrem Namen und der Nummer der entsprechenden Aufgabe.
4. Wenn sich ein **numerisches Ergebnis** ohne Taschenrechner nicht weiter vereinfachen lässt, so können Sie es unvereinfacht stehen lassen (z.B. $\frac{0.789}{592}$ oder $\cos(94^\circ)$).
5. Alle Ergebnisse und Rechenschritte sind zu begründen, sofern nicht anders vermerkt.
6. Die geplante Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Punkte						
erreichbare Punkte	25	25	25	10	15	100

Aufgabe 1 (25 Punkte) (i) Sei

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - \pi y \\ x \end{bmatrix}$$

und

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Bestimme die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ von f bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

(ii) Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$, d.h.

$$V = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Bestimme die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(D)$ von

$$D: V \rightarrow V, \quad p \mapsto p' + X^2 \cdot p'' - X \cdot p'$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, wobei p' die Ableitung von p bezeichnet.

Aufgabe 2 (25 Punkte) (i) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 23 & 60 & 0 \\ -10 & -26 & 0 \\ 4 & 10 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A über dem Körper $\mathbb{R}$.

(ii) Sei

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 \\ -6 & -5 & 12 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von B über $\mathbb{R}$ sind 1 und -2. Berechne die zugehörigen Eigenräume.

Aufgabe 3 (25 Punkte) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und U und W Untervektorräume von V .

(i) Zeige, dass $U \cap W$ ein Untervektorraum von V ist.

(ii) Zeige, dass

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$$

gilt, wobei $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$.

Hinweis: Beginne damit eine Basis von $U \cap W$ geeignet zu ergänzen.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein nicht-ausgeartetes Skalarprodukt und W ein Untervektorraum von V . Zeige, dass $(W^\perp)^\perp = W$.

Aufgabe 5 (15 Punkte) Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründe deine Antwort.

- (i) Seien A und B quadratische Matrizen. Es gilt $\det(AB) = \det(BA)$ genau dann, wenn $AB = BA$.
- (ii) $(i, 0)$, $(\pi, 0)$ und $(1, 0)$ sind linear unabhängig im $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{C}^2$.
- (iii) $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$ ist ein Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

