

Lineare Algebra 1: Beispielklausur

Bitte füllen Sie zunächst das Deckblatt sorgfältig aus und lesen Sie die folgenden Hinweise.

Nachname:	
Vorname:	
Matrikel-Nummer:	
Studiengang:	

1. Bitte legen Sie **Studierendenausweis** (Matrikel-Nummer) und ggf. **Lichtbildausweis** zur Kontrolle auf dem Tisch bereit. Bitte schalten Sie ihr **Handy** still/aus und legen es außer Reichweite ab.
2. Erlaubte **Hilfsmittel** sind lediglich Schreibutensilien (kein Rotstift, kein Bleistift).
3. Bitte melden Sie sich (Handzeichen), falls Sie eine Textformulierung nicht verstehen oder **zusätzliches Papier** für die Bearbeitung einer Aufgabe benötigen. Versehen Sie zusätzliches Papier immer mit Ihrem Namen und der Nummer der entsprechenden Aufgabe.
4. Wenn sich ein **numerisches Ergebnis** ohne Taschenrechner nicht weiter vereinfachen lässt, so können Sie es unvereinfacht stehen lassen (z.B. $\frac{0.789}{592}$ oder $\cos(94^\circ)$).
5. Alle Ergebnisse und Rechenschritte sind zu begründen, sofern nicht anders vermerkt.
6. Die geplante Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Punkte						
erreichbare Punkte	25	25	25	10	15	100

Aufgabe 1 (25 Punkte) (i) Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$S_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(kx) \quad \text{und} \quad C_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(kx).$$

Sei V der $\mathbb{R}$ -Vektorraum, der von $S_k, C_k, k = 1, 2$, erzeugt wird, d.h.

$$V = \{a_1 S_1 + a_2 S_2 + b_1 C_1 + b_2 C_2 \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}\}.$$

Sei weiter D die Ableitung und $\mathcal{B} = (S_1 + S_2, S_1 - S_2, C_1 + C_2, C_2)$ und $\mathcal{C} = (S_1 + C_1, S_2 + C_2, S_1, C_2)$. Bestimme die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(D)$ von D bezüglich den Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

(ii) Sei $\mathcal{E}$ eine weitere Basis mit

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_V) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(id_V) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestimme $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(D)$.

Aufgabe 2 (25 Punkte) Bestimme das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 60 & 60 \\ -6 & -26 & -24 \\ 2 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (25 Punkte) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $L: V \rightarrow V$ linear mit $L \circ L = L$.

(i) Zeige, dass $\ker L$ ein Untervektorraum von V ist.

(ii) Zeige, dass

$$\forall v \in V \exists v_1 \in \ker L \exists v_2 \in \operatorname{im} L: v = v_1 + v_2$$

(iii) Zeige, dass $\ker L \cap \operatorname{im} L = \{0\}$.

(iv) Finde ein Beispiel für $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $L \circ L = L$ und $L \neq 0$ und $L \neq \operatorname{id}_{\mathbb{R}^2}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Sei A eine quadratische Matrix über einem Körper K mit ${}^t A = A^{-1}$. Zeige, dass $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$.

Aufgabe 5 (15 Punkte) Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründe deine Antwort.

- (i) Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$ für alle quadratischen Matrizen A und alle Skalare $\lambda \in K$.
- (ii) Für alle $v_1, v_2, v_3 \in V$ (V ein K -Vektorraum), sodass jeweils v_1, v_2 und v_1, v_3 und v_2, v_3 linear unabhängig sind, sind auch v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.
- (iii) Für alle Untervektorräume W von V ist $\{f: V \rightarrow V \text{ linear} \mid W \subseteq \ker f\}$ ein Untervektorraum des Vektorraums aller Endomorphismen von V .