Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Lasse Wolf

Sommersemester 2019

Lineare Algebra 1

3. Übungsblatt

Präsenzaufgabe P3.1 Sei $g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x - y$. Bestimme und zeichne die folgenden Mengen.

(i) $g^{-1}(\{0\})$

(ii) $g^{-1}(\{1\})$

(iii) $g^{-1}(\{0, 1\})$

(iv) $g^{-1}([0, 1])$, wobei $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

(v) $g(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

(vi) $g(\mathbb{R} \times \{0\})$

(vii) $g([0, 1] \times [0, 1])$

Präsenzaufgabe P3.2 Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $A, B \subseteq X$. Zeige

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ und

(ii) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

(iii) Gib jeweils ein Beispiel an, bei dem in (ii) keine Gleichheit bzw. Gleichheit gilt.

Präsenzaufgabe P3.3 Welche der folgenden Funktionen sind injektiv/surjektiv/bijektiv?

(i) $f_1\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_1(n) = 2n + 1$

(ii) $f_2\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_2(n) = n + 1$

(iii) $f_3\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_3(n) = n^2$

(iv) $f_4\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_4(n) = \lfloor n/2 \rfloor$, wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundefunktion ist.

Präsenzaufgabe P3.4 Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Zeige:

(i) Sind f und g surjektiv, dann ist $g \circ f$ surjektiv.

(ii) Ist $g \circ f$ surjektiv, dann ist g surjektiv.

Präsenzaufgabe P3.5 (Zusatz) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeige:

(i) $R = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x')\}$ definiert eine Äquivalenzrelation auf X.

Statt $(x, x') \in R$ schreiben wir $x \sim x'$. Sei p die (kanonische) Abbildung $X \to X/\sim$, $x \mapsto [x]$.

(ii) Es gibt genau eine Abbildung $g\colon X/\sim \to Y$ mit $f = g \circ p$.

(iii) g ist injektiv.

(iv) Wenn f surjektiv ist, dann ist g bijektiv.

Hausaufgabe H3.1 Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $V, W \subseteq Y$. Zeige

(i) $f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$ und

(ii) $f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$.

Hausaufgabe H3.2 Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Zeige:

(i) Sind f und g injektiv, dann ist $g \circ f$ injektiv.

(ii) Ist $g \circ f$ injektiv, dann ist f injektiv.

(iii) Gib ein Beispiel für f und g an, bei dem weder f noch g bijektiv sind, aber $g \circ f$ bijektiv ist.

Hausaufgabe H3.3 Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeige:

(i) $f(f^{-1}(V) \subseteq V$ für $V \subseteq Y$

(ii) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ für $A \subseteq X$

(iii) f ist genau dann surjektiv, wenn $f(f^{-1}(V)) = V$ für alle $V \subseteq Y$.

(iv) f ist genau dann injektiv, wenn $A = f^{-1}(f(A))$ für alle $A \subseteq X$.

Hausaufgabe H3.4 Sei M eine Menge. Zeige, dass es keine surjektive Abbildung $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$ gibt.
Hinweis: Betrachte die Teilmenge $\{m \in M \mid m \notin f(m)\}$.

Abgabe der Hausaufgaben: Montag, 6.5.2019, 10 Uhr in den blauen Postfächern Nr. 19 (Übung Montag) und Nr. 28 (Übung Dienstag) auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.