Universität Paderborn Sommersemester 2019
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Lasse Wolf

Lineare Algebra 1

4. Übungsblatt

Präsenzaufgabe P4.1 ([Lang, S. 281 1.-2.]) Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) $(1 + i)(1 - i)$

(ii) $(1 + i)i(2 - i)$

(iii) $(1 + i)^{-1}$

(iv) $\frac{1}{3+i}$

(v) $\frac{2+i}{2-i}$

Präsenzaufgabe P4.2 ([Lang, S. 281 4.]) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeige $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w}$ und $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w}$.

Präsenzaufgabe P4.3 Sei K ein Körper. Zeige:

(i) Für alle $x \in K \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $y \in K$, sodass $xy = 1$.

(ii) Für alle $x \in K \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $y \in K$, sodass $xy = x$.

Präsenzaufgabe P4.4 ([Lang, S. 9 12.]) Zeige, dass $K = \{a+b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Körper ist.

Präsenzaufgabe P4.5 ([Lang, S. 9 9.]) Zeige, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume sind.

(i) $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$

(ii) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \wedge 2y = z\}$

(iii) $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 3z\}$

Präsenzaufgabe P4.6 ([Lang, S. 9 1.-2.]) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige:

(i) $c \cdot 0 = 0$ für $c \in K$.

(ii) Ist $c \in K \setminus \{0\}$ mit $c \cdot v = 0$, dann gilt $v = 0$.

Hausaufgabe H4.1 ([Lang, S. 281 5.]) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeige $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

Hausaufgabe H4.2 ([Lang, S. 281f. 7.]) Wir definieren $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \in \mathbb{C}$ für $\theta \in \mathbb{R}$.

(i) Zeige mithilfe der Additionstheoreme für sin und cos, dass $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$ für alle $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) Zeige, dass sich jede komplexe Zahl mit Betrag 1 als $e^{i\theta}$ mit $\theta \in \mathbb{R}$ schreiben lässt.

(iii) Zeige, dass sich jede komplexe Zahl als $re^{i\theta}$ mit $\theta \in \mathbb{R}$ und $r \geq 0$ schreiben lässt.

(iv) Zeige für $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ mit $r_1, r_2 \geq 0$ und $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, dass

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

(v) Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es genau n verschiedene komplexe Zahlen w mit $w^n = z$ gibt.

Hausaufgabe H4.3 Sei K ein Körper. Zeige:

(i) Für alle $x \in K$ gilt $(-1) \cdot x = -x$.

(ii) Seien $x, y \in K$. Wenn $xy = 0$, dann gilt $x = 0$ oder $y = 0$.

Abgabe der Hausaufgaben: Montag, 13.5.2019, 10 Uhr in den blauen Postfächern Nr. 19 (Übung Montag) und Nr. 28 (Übung Dienstag) auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.