Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Lasse Wolf

Sommersemester 2019

Lineare Algebra 1

10. Übungsblatt

Präsenzaufgabe P10.1 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_2, 2x_1, -3x_1 + x_2)$.

(i) Bestimme die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ von f bezüglich der Basen

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

(ii) Bestimme die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ von f bezüglich der Basen

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{C}' = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

mithilfe der Formel für den Basiswechsel.

Präsenzaufgabe P10.2 Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit den Basen

$$\mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

sowie die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Berechne

(i) $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id})$

(ii) $D = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$

(iii) D^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

(iv) A^n für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

Präsenzaufgabe P10.3 Wir betrachten den Raum V der reellen 2×2 – Matrizen mit der Basis $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, wobei

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seien $M, N \in V$ und $f\colon V \to V$, $X \mapsto MX + XN$.

(i) Zeige, dass f linear ist.

(ii) Gib konkrete Matrizen M und N an, sodass f bijektiv ist.

(iii) Bestimme $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ für $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ und $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Hausaufgabe H10.1 Sei K ein Körper sowie $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ Basen von K^n. Wir definieren die folgenden Matrizen, indem wir die Basisvektoren als Spalten einsetzen:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & | & | \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} | & | & | \\ b_1 & \cdots & b_n \\ | & | & | \end{bmatrix}.$$

Zeige, dass für die Basiswechselmatrix gilt:

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = A^{-1}B.$$

Abgabe der Hausaufgaben: Montag, 24.06.2019, 10 Uhr in den blauen Postfächern Nr. 19 (Übung Montag) und Nr. 28 (Übung Dienstag) auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.