

Lineare Algebra 1: Lösung Probeklausur

Aufgabe 1 (40 Punkte) Bilden die folgenden Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$? Dokumentiere die Umformungsschritte in der Rechnung.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir prüfen die Vektoren auf lineare Unabhängigkeit, indem wir den Gauß-Algorithmus benutzen.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 11 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & -1/2 & -5/2 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1/2 & -5/2 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hier haben wir zunächst letzte Zeile $11/2$ -mal auf die zweite und $5/2$ -mal auf die erste Zeile addiert. Im zweiten Schritt haben wir die zweite Zeile auf die erste Zeile addiert. Im letzten Schritt haben wir die Zeilen umsortiert und skaliert.

Es folgt, dass die drei Vektoren linear unabhängig sind. Da es sich um 3 Vektoren im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ handelt, bilden v_1, v_2, v_3 eine Basis.

Aufgabe 2 (20 Punkte) Sei A eine invertierbare $n \times n$ -Matrix über einem Körper K . Zeige, dass tA invertierbar ist und $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ gilt.

Lösung: Damit tA invertierbar ist, müssen wir eine Matrix C finden, die $C{}^tA = {}^tAC = I$ erfüllt. Dann gilt auch $({}^tA)^{-1} = C$.

Nach Definition der Inversen gilt $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. Da ${}^tI = I$ gilt auch $I = {}^t(A^{-1}A) = {}^tA {}^t(A^{-1})$ und $I = {}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}) {}^tA$. Also $C = {}^t(A^{-1})$. Also ist tA invertierbar mit $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Aufgabe 3 (40 Punkte) Alle Ergebnisse und Rechenschritte sind zu begründen.

(i) Ist die Abbildung

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + z \\ x - y \end{pmatrix}$$

linear?

(ii) Ist die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + z = 0 \text{ und } x - y = 0 \right\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$?

(iii) Bestimme eine Basis von U . Was ist die Dimension von U ?

(iv) Sei

$$G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x.$$

Was ist $\dim \ker(G \circ F)$?

(v) Ist F injektiv? Ist F surjektiv?

Lösung:

(i) Ja, denn für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned} F(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) &= F(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (2(\lambda x + x') + (\lambda z + z'), \lambda x + x' - (\lambda y + y')) \\ &= \lambda(2x + z, x - y) + (2x' + z', x' - y') \\ &= \lambda F(x, y, z) + F(x', y', z'). \end{aligned}$$

(ii) Nach der Definition des Kerns gilt $U = \ker F$. Also ist U ein Untervektorraum, da jeder Kern einer linearen Abbildung ein Untervektorraum ist.

Alternativ kann auch die Definition eines Untervektorraums geprüft werden.

(iii)

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + z = 0 \text{ und } x - y = 0\} \\ &= \{(x, x, -2x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}(1, 1, -2) \end{aligned}$$

(Das zeigt auch, dass U ein Untervektorraum ist)

Also ist der Vektor $(1, 1, -2)$ ein Erzeugendensystem von U und linear unabhängig, da $\neq 0$, d.h. eine Basis. Folglich $\dim U = 1$.

(iv) Offenbar ist G linear und damit auch $G \circ F$. Es gilt also

$$\dim \ker(G \circ F) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{im}(G \circ F) = 3 - 1 = 2,$$

denn

$$\text{im}(G \circ F) = \{G(F(x, y, z)) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{2x + z \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

(v) F ist nicht injektiv, da $\ker F \neq \{0\}$.

F ist surjektiv, da für beliebiges $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ein $v \in \mathbb{R}^3$ mit $F(v) = (a, b)$ gefunden werden kann. Es gilt nämlich beispielsweise $F(0, -b, a) = (a, b)$. Andere Urbilder erhält man durch Addition von Elementen aus U . Alternativ kann auch wieder die Dimensionsformel verwendet werden.