Lineare Algebra 1: Lösung 2. Probeklausur

Aufgabe 1 (40 Punkte) Invertiere die folgende Matrix. Dokumentiere die Umformungsschritte in der Rechnung.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Wir formen $(A \mid I)$ mit dem Gauß-Algorithmus in $(I \mid B)$ um. Dann ist $B = A^{-1}$. Dabei versuchen wir keine Brüche entstehen zu lassen, damit die Rechnung schön wird, d.h. wir erzeugen eine 1 in den Spalten ohne zu teilen. (Das ist nicht immer möglich.)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 11 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \leftarrow Z_1 + 3Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \leftarrow Z_2 - Z_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \leftarrow Z_3 + 3Z_2]{Z_1 \leftarrow Z_1 - 2Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -6 & -7 & 3 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 8 & -3 & 3 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -6 & -7 & 3 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \leftarrow Z_1 + 6Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 3 & 4 & 15 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \leftarrow Z_2 - 3Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 3 & 4 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 3 & 4 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 5 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Zeilentausch}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 & -15 \end{array}\right)$$

Also gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 3 & 5 & 16 \\ -3 & -4 & -15 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (20 Punkte) A und B seien invertierbare $n \times n-$ Matrizen über einem Körper K.
Zeige, dass $A \cdot B$ invertierbar ist und $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ gilt.

Lösung:
Damit AB invertierbar ist und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ gilt, müssen wir zeigen, dass $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ und $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. Das gilt, denn

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

und

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

jeweils nach Definition der Inversen.

Aufgabe 3 (40 Punkte) Alle Ergebnisse und Rechenschritte sind zu begründen.

(i) Ist die Abbildung

$$F\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3, \quad F(z_1, z_2) = (5z_2 - z_1, z_1 + 2z_2, 2z_1)$$

linear?

(ii) Ist die Menge

$$U = \left\{(5z_2 - z_1, z_1 + 2z_2, 2z_1) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\right\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^3$?

(iii) Bestimme eine Basis von U. Was ist die Dimension von U?

(iv) Ist F injektiv?

(v) Ist F surjektiv?

(vi) Die Abbildung

$$G\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2, \quad G(x, y, z) = (x + y, x + z)$$

ist linear. (Dies darf ohne Beweis verwendet werden.) Ist auch $G \circ F$ linear?

(vii) Ist $G \circ F$ bijektiv?

Lösung:

(i) Ja, denn für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $(z_1, z_2), (z_1', z_2') \in \mathbb{C}^2$ gilt

$$\begin{aligned}
F(\lambda(z_1, z_2) + (z_1', z_2')) &= F(\lambda z_1 + z_1', \lambda z_2 + z_2') \\
&= (5(\lambda z_2 + z_2') - (\lambda z_1 + z_1'), (\lambda z_1 + z_1') + 2(\lambda z_2 + z_2'), 2(\lambda z_1 + z_1')) \\
&= \lambda(5z_2 - z_1, z_1 + 2z_2, 2z_1) + (5z_2' - z_1', z_1' + 2z_2', 2z_1') \\
&= \lambda F(z_1, z_2) + F(z_1', z_2').
\end{aligned}$$

(ii) Nach der Definition des Bildes gilt $U = \operatorname{im} F$. Also ist U ein Untervektorraum, da das Bild einer linearen Abbildung ein Untervektorraum ist.

Alternativ kann auch die Definition eines Untervektorraums geprüft werden.

(iii) Offenbar gilt

$$U = \{z_1 \cdot (-1, 1, 2) + z_2 \cdot (5, 2, 0) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\} = \operatorname{span}\{(-1, 1, 2), (5, 2, 0)\}.$$

(Das zeigt auch, dass U ein Untervektorraum ist)

Also ist $((-1, 1, 2), (5, 2, 0))$ ein Erzeugendensystem von U. Dieses System ist auch linear unabhängig, denn

$$a(-1, 1, 2) + b(5, 2, 0) = 0 \implies b = 0 \text{ (letzte Zeile)} \implies a = 0.$$

Also ist $((-1, 1, 2), (5, 2, 0))$ eine Basis von U. Folglich $\dim U = 2$.

(iv) F ist injektiv, da $\dim \ker F = 2 - \dim \operatorname{im} F = 2 - 2 = 0$ nach der Dimensionsformel. Also $\ker F = \{0\}$, was gleichbedeutend zu der Injektivität von F ist. Alternativ kann $\ker F = \{0\}$ auch direkt gezeigt werden.

(v) F ist nicht surjektiv, denn $\dim \operatorname{im} F = 2$ und deshalb ist $\operatorname{im} F$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{C}^3$.

(vi) $G \circ F$ ist linear, da Verknüpfungen von linearen Abbildungen wieder linear sind.

(vii) Es gilt

$$(G\circ F)(z_1, z_2) = G(5z_2 - z_1, z_1 + 2z_2, 2z_1) = (5z_2 - z_1 + z_1 + 2z_2, 5z_2 - z_1 + 2z_1) = (7z_2, z_1 + 5z_2).$$

Also gilt für $(z_1, z_2) \in \ker G\circ F$, dass $7z_2 = 0$ und $z_1 + 5z_2 = 0$. Damit folgt $z_2 = 0$ und damit auch $z_1 = 0$. Folglich ist $\ker G \circ F$ trivial und $G \circ F$ ist injektiv (da linear). Da die Dimension des Definitionsbereichs und Wertebereichs übereinstimmen, ist $G \circ F$ auch surjektiv und damit bijektiv.