Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2025

Lineare Algebra 2

1. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 1.1 Sei $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ der komplexe Vektorraum komplexwertiger glatter Funktionen auf $\mathbb{R}$ und sei

$$D : C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}), \quad f \mapsto f'.$$

Seien weiter $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$ und

$$T := \sum_{j=0}^{n} a_j D^j : C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}).$$

Wir schreiben $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ für die verschiedenen Nullstellen des Polynoms

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

und $m_1, \dots, m_s$ für die entsprechenden Multiplizitäten. Dann gilt

$$P(x) = a_n \prod_{k=1}^{s} (x - \lambda_k)^{m_k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{s} m_k = n.$$

(a) Sei $V := \ker(T)$. Zeigen Sie, dass

$$V = \bigoplus_{k=1}^{s} \ker\big((D - \lambda_k)^{m_k}\big).$$

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $1 \leq k \leq s$

$$\ker\big((D - \lambda_k)^{m_k}\big) = \operatorname{span}\Big\{\big(\mathbb{R} \ni x \mapsto x^j e^{\lambda_k x}\big) : 0 \leq j < m_k\Big\}.$$

(c) Beweisen Sie, dass $\dim(V) = n$.

Präsenzaufgabe 1.2 Bestimmen Sie alle $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass $T^2 - 2T + 1 = 0$.

Präsenzaufgabe 1.3 (Fitting-Zerlegung) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $T \in \operatorname{End}(V)$. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$N_k := \ker(T^k) \quad \text{und} \quad B_k := \operatorname{Bild}(T^k).$$

(a) Zeigen Sie, dass $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \dots$ und $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$.

(b) Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $N_k = N_n$ und $B_k = B_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq n$.

Sei jetzt $\kappa \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl, sodass $N_\kappa = N_{\kappa+1}$.

(c) Zeigen Sie, dass

$$N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \cdots \subsetneq N_\kappa = N_{\kappa+1} = N_{\kappa+2} = \dots$$

und

$$B_1 \supsetneq B_2 \supsetneq \cdots \supsetneq B_\kappa = B_{\kappa+1} = B_{\kappa+2} = \dots.$$

(d) Beweisen Sie, dass $V = N_\kappa \oplus B_\kappa$.

Hausaufgabe 1.1 Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und sei $T \in \mathrm{End}(V)$ mit $T^3 - T = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von T enthalten sind in $\{-1, 0, 1\}$.

(b) Für $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ sei $V_\lambda = \ker(T - \lambda)$. Zeigen Sie, dass $V = V_{-1} \oplus V_0 \oplus V_1$.

Hausaufgabe 1.2 Geben Sie für alle $n, j \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $j \leq n$ ein Beispiel für einen komplexen Vektorraum V und ein $T \in \mathrm{End}(V)$ an, sodass das charakteristische Polynom von T durch $\chi_T(\lambda) = \lambda^n$ und das Minimalpolynom durch $\mu_T(\lambda) = \lambda^j$ gegeben ist.