

Lineare Algebra 2

2. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 2.1 Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Jordan Basis und die Jordan Normalform der Abbildung

$$T_A : \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^5, \quad v \mapsto Av.$$

Hausaufgabe 2.1 Sei

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -18 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Jordan Basis und die Jordan Normalform der Abbildung

$$T_A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad v \mapsto Av.$$

Hausaufgabe 2.2 Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$. Eine lineare Abbildung $N : V \rightarrow V$ heist nilpotent, falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $N^k = N \circ N \circ \dots \circ N = 0$ die Nullabbildung ist. Beweisen Sie, dass es zu jeder linearen Abbildung $T : V \rightarrow V$ lineare Abbildungen $D : V \rightarrow V$ und $N : V \rightarrow V$ gibt, sodass

- D diagonalisierbar ist
- N nilpotent ist
- $T = D + N$
- D und N kommutieren, d.h. $D \circ N = N \circ D$.

Diese Zerlegung von T wird als Jordan-Chevalley-Zerlegung bezeichnet.

Hausaufgabe 2.3 In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Jordan-Chevalley-Zerlegung eindeutig ist. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $T : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Seien $D, D', N, N' : V \rightarrow V$ lineare Abbildungen, sodass

- D und D' diagonalisierbar sind
- N und N' nilpotent sind
- $T = D + N$ und $T = D' + N'$
- D und N kommutieren und D' und N' kommutieren.

- (a) Zeigen Sie, dass die Summe zweier kommutierender nilpotenter Operatoren wieder nilpotent ist. (*Hinweis: Binomischer Lehrsatz.*)

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von T und sei $V_\lambda(T)$ der verallgemeinerte Eigenraum von T zum Eigenwert λ .

- (b) Zeigen Sie, dass $V_\lambda(T)$ invariant unter D und N ist.
- (c) Zeigen Sie, dass die Einschränkung von $T - \lambda$ auf $V_\lambda(T)$ nilpotent ist und mit N kommutiert.
- (d) Schließen Sie mit Hilfe von (a), dass die Einschränkung von $D - \lambda$ auf $V_\lambda(T)$ gleich 0 ist.
- (e) Folgern Sie, dass $D = D'$.
- (f) Zeigen Sie, dass $N = N'$.