Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2025

Lineare Algebra 2

3. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 3.1 Eine Lemniskate von Bernoulli ist die Teilmenge L_c von $\mathbb{C}$ gegeben durch

$$L_c = \{z \in \mathbb{C} : |z - c|\,|z + c| = c^2\}$$

wobei c eine positive reelle Zahl ist.

(a) Zeigen Sie, dass

$$L_c = \Big\{x + iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } (x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)\Big\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$L_c = \Big\{r\big(\cos(\phi) + i\sin(\phi)\big) \in \mathbb{C} : \phi \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ mit } r = c\sqrt{2\cos(2\phi)}\Big\}.$$

(c) Skizzieren Sie L_c.

Präsenzaufgabe 3.2 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & -7 & 10 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Jordan Basis und die Jordan Normalform der Abbildung

$$T_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \quad v \mapsto Av.$$

Hausaufgabe 3.1 Sei H die Teilmenge von $\mathbb{C}$ gegeben durch

$$H = \left\{z \in \mathbb{C} : |z|^6 = \frac{-(z^2 - \overline{z}^2)^2}{4}\right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$H = \Big\{x + iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } (x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2\Big\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$H = \Big\{r\big(\cos(\phi) + i\sin(\phi)\big) \in \mathbb{C} : \phi \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ mit } r = |\sin(2\phi)|\Big\}.$$

(c) Skizzieren Sie H.

Hausaufgabe 3.2 Zeigen Sie, dass jedes irreduzible Polynom über $\mathbb{R}$ höchstens von Grad 2 ist.

Hausaufgabe 3.3 Sei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 4 & 9 & -5 \\ 9 & 18 & -10 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Jordan Basis und die Jordan Normalform der Abbildung

$$T_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \quad v \mapsto Av.$$