Universität Paderborn Sommersemester 2025
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Lineare Algebra 2

4. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 4.1 Betrachten Sie die quadratische Form

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3x_1^2 + 2x_2x_3 - 2x_3^2.$$

Sei $\langle \cdot , \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die symmetrische Bilinearform B auf $\mathbb{R}^3$, sodass $Q(x) = B(x, x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3, 3; \mathbb{R})$, sodass $B = \langle \cdot , A \cdot \rangle$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, sodass es $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \{\pm 1\}$ mit der Eigenschaft gibt, dass Q die Form

$$Q\Big(\sum_{j=1}^{3} c_j v_j\Big) = \sum_{j=1}^{3} \epsilon_j c_j^2 \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

hat.

(d) Bestimmen Sie die Definitheit von Q.

Präsenzaufgabe 4.2 Betrachten Sie die quadratische Form

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

Skizzieren Sie die inversen Bilder $Q^{-1}(\{1\})$, $Q^{-1}(\{0\})$ und $Q^{-1}(\{-1\})$.

Hausaufgabe 4.1 Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $\langle \cdot , \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf K^n. Betrachten Sie eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, n; K)$ und die entsprechende Bilinearform

$$B : K^n \times K^n \to K, \quad (x, y) \mapsto \langle x, Ay \rangle.$$

Sei $\{v_1, \cdot, v_n\}$ eine Basis von K^n und sei

$$C = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in K^n$

$$B\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\Big) = \langle x, C^T A C y \rangle,$$

wobei C^T die Transponierte von C ist.

Hausaufgabe 4.2 Sei $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form. Beweisen Sie die folgenden Behauptung. Wenn es $v, w \in \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $Q(v) > 0$ und $Q(w) < 0$,

dann gibt es $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sodass $Q(u) = 0$.
Hinweis: Betrachten Sie die Vektoren in $\mathbb{R}^n$ der Form $tv + (1-t)w$ mit $0 \le t \le 1$.

Hausaufgabe 4.3 Es sei

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z^2 = x^2 + y^2,\ z \ge 0 \right\}$$

und

$$F_\phi := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \right\}$$

für $\phi \in [0, 2\pi)$.

(a) Zeichnen Sie K und F_ϕ für $\phi = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2$ in ein Koordinatensystem.

(b) Berechnen Sie für welche $\phi \in [0, 2\pi)$ der Schnitt $K \cap F_\phi$ von K und F_ϕ eine Ellipse ist.
Hinweis: Eine Ellipse is eine Teilmenge einer Ebene, die sich in einem geeigneten Koordinatensystem durch eine Gleichung

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

mit Konstanten $a, b \in (0, \infty)$ beschreiben läßt.