Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2025

Lineare Algebra 2

5. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 5.1 Seien $V = M(2 \times 2, \mathbb{R})$ und

$$B : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \operatorname{tr}(XY)$$

(a) Zeigen Sie, dass B eine symmetrische Bilinearform auf V ist.

(b) Bestimmen Sie die Signatur von B.

Hausaufgabe 5.1 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(5 \times 5, \mathbb{C})$$

(a) Zeigen Sie, dass A hermitesch ist

(b) Bestimmen Sie die Signatur von A.

Hausaufgabe 5.2 Sei $A \in \mathrm{SO}(3)$. Zeigen Sie, dass es eine Gerade $\ell \in \mathbb{R}^3$ gibt, sodass die Abbildung

$$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad x \mapsto Ax$$

ein Drehung um die Achse ℓ ist.
Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass A einen Eigenvektor mit Eigenwert 1 hat.

Hausaufgabe 5.3 Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\mathfrak{p} := \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{a} := \{\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) : a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathfrak{p}.$$

Betrachten Sie die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{O}(n) \times \mathfrak{a} \to \mathfrak{p}, \quad (k, X) \mapsto kXk^{-1}$$

(a) Zeigen Sie, dass Φ surjektiv ist.

(b) Beweisen Sie die folgende Behauptung. Wenn $k \in \mathrm{O}(n)$ und $X = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathfrak{a}$ so sind, dass $\Phi(k, X) \in \mathfrak{a}$, dann gibt es eine Permutation $\sigma \in S_n$, sodass $\Phi(k, X) = \operatorname{diag}(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$.