Universität Paderborn Sommersemester 2025
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Lineare Algebra 2

6. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 6.1 Beweisen Sie den Satz von Jacobi: Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Sei $A \in \mathrm{Sym}(n, K)$, sodass $\Delta_k(A) \neq 0$ für $k = 1, \dots, n$. Dann gibt es eine Matrix

$$L \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & * & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

sodass

$$LAL^T = \begin{pmatrix} \Delta_1(A) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_2(A)}{\Delta_1(A)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_3(A)}{\Delta_2(A)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\Delta_n(A)}{\Delta_{n-1}(A)} \end{pmatrix}.$$

Präsenzaufgabe 6.2 Bestimmen Sie die Polarzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe 6.1 Bestimmen Sie die Polarzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hausaufgabe 6.2 Seien $n \in \mathbb{N}$ und

$A := \{\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_n > 0\} \subseteq M(n \times n, \mathbb{R})$,
$N := \{X \in M(n \times n, \mathbb{R}) : X$ ist eine obere Dreiecksmatrix und $X_{1,1} = X_{2,2} = \dots = X_{n,n} = 1\}$,
$B := \{X \in M(n \times n, \mathbb{R}) : X$ ist eine obere Dreiecksmatrix und $X_{1,1}, X_{2,2}, \dots, X_{n,n} > 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass A, N und B Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $XY \in B$ für alle $X \in A$ und $Y \in B$.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$m : A \times N \to B, \quad (X, Y) \mapsto XY$$

bijektiv ist.

Hausaufgabe 6.3 Sei

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$$

und

$$p : V \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mapsto a.$$

Sei $\lambda > 0$ und definiere

$$\mathcal{O}_\lambda := \Big\{ T \in V : \mathrm{spec}(T) = \{-\lambda, \lambda\} \Big\}.$$

Beweisen Sie, dass $p(\mathcal{O}_\lambda) = [-\lambda, \lambda]$.