Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2025

Lineare Algebra 2

7. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 7.1 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Gegeben seien die Untergruppen

$$K = \begin{cases} \mathrm{O}(n) & (\mathcal{F} = \mathbb{R}) \\ \mathrm{U}(n) & (\mathcal{F} = \mathbb{C}) \end{cases}$$
$$A = \{\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_n > 0\} \in M(n \times n, \mathbb{R})$$
$$N = \{X \in M(n \times n, \mathbb{R}) : X \text{ ist eine obere Dreiecksmatrix und } X_{1,1} = X_{2,2} = \cdots = X_{n,n} = 1\}.$$

von $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$K \times A \times N \to G, \quad (k, a, n) \mapsto kan$$

eine Bijektion ist.

Für jedes $g \in G$ gibt es eindeutige $k \in K$, $a \in A$ und $n \in N$, sodass $g = kan$ ist. Diese Zerlegung von g wird Iwasawa-Zerlegung genannt.

Hausaufgabe 7.1 Bestimmen Sie die Iwasawa-Zerlegung von $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Hausaufgabe 7.2 Sei $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Matrizen

$$\overline{n} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad a \in \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \beta & \\ 0 & & \gamma \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}, \quad n \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

sodass $g = \overline{n} a n$.

Eine solche Zerlegung von g nennt man eine Bruhat oder LU-Zerlegung.

Hausaufgabe 7.3 Sei K ein Körper, V ein Vektorraum über K der Dimension $2n$ und $\omega : V^2 \to K$ eine alternierende Bilinearform auf V. Wir definieren

$$\omega^{\wedge n} : V^{2n} \to K,$$
$$(v_1, \dots, v_{2n}) \mapsto \sum_{\sigma \in S_{2n}} \mathrm{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}) \omega(v_{\sigma(3)}, v_{\sigma(4)}) \dots \omega(v_{\sigma(2n-1)}, v_{\sigma(2n)})$$

(a) Zeigen Sie, dass $\omega^{\wedge n}$ eine alternierende $2n$-Form auf V ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\omega^{\wedge n}(Av_1, Av_2, \dots, Av_{2n}) = \det(A) \omega(v_1, v_2, \dots, v_{2n})$$

für alle $A \in \mathrm{End}(V)$ und $v_1, \dots v_{2n} \in V$.