Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2025

Lineare Algebra 2

9. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 9.1 Zeigen Sie, dass die abelsche Gruppen

$$G = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times Z/49\mathbb{Z}$$

und

$$H = \mathbb{Z}/210\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$$

die gleiche Kardinalität haben, aber nicht isomorph sind.

Präsenzaufgabe 9.2 Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei P ein regelmäßiges n-Eck in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt 0. Wir definieren die *Diedergruppe* D_n durch

$$D_n := \{A \in \mathrm{O}(2) \mid A(P) = P\}.$$

Sei $r \in \mathrm{O}(2)$ die Drehung über den Winkel $\frac{2\pi}{n}$. Fixiere eine der Ecken von P und sei s die Spiegelung an der Geraden durch diese Ecke und den Ursprung 0.

(a) Zeigen Sie, dass $R_n := \{r^j \mid j \in \mathbb{N}_0, j \leq n-1\}$ eine normale Untergruppe von D_n ist.

(b) Zeigen Sie, dass $D_n = \{e, s\} \ltimes R_n$.

Hausaufgabe 9.1 Sei G die von den Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugte Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ und sei

$$H := \{X \in G \mid X_{1,1} = X_{2,2} = 1\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe von G ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2^m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(c) Beweisen Sie, dass für alle $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2^m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{k}{2^l} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \frac{j}{2^{\max\{m,l,0\}}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(d) Beweisen Sie, dass H nicht endlich erzeugt ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Elemente $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2^m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ *mit* $m \in \mathbb{N}$.

Hausaufgabe 9.2 Seien D_n, r und s wie in P.A. 9.2.

(a) Zeigen Sie, dass D_n von rs und $r^2 s$ erzeugt wird.

(b) Bestimmen Sie die von r^2 und $r^2 s$ erzeugte Untergruppe.

Hausaufgabe 9.3 Sei G eine abelsche Gruppe und sei

$$G_{\text{tor}} := \{g \in G \mid \exists k \in \mathbb{Z} :\ g^k = e\}$$

(a) Zeigen Sie, dass G_{tor} eine Untergruppe von G ist.

(b) Beweisen Sie, dass $H := G/G_{\text{tor}}$ eine abelsche Gruppe ist, sodass H_{tor} die triviale Gruppe ist.