Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2025

Lineare Algebra 2

10. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 10.1 Sei K ein Körper und I eine Menge. Für jedes $i \in I$, sei V_i ein Vektorraum über K. Die direkte Summe der V_i mit $i \in I$ ist der Vektorraum

$$\bigoplus_{i\in I} V_i := \Big\{(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i \mid v_i = 0 \text{ für alle außer endlich viele } i \in I\Big\}$$

versehen mit der Addition

$$\bigoplus_{i\in I} V_i \times \bigoplus_{i\in I} V_i \to \bigoplus_{i\in I} V_i, \quad \Big((v_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I}\Big) \mapsto (v_i + w_i)_{i\in I}$$

und der Skalarmultiplikation

$$K \times \bigoplus_{i\in I} V_i \to \bigoplus_{i\in I} V_i, \quad \Big(\lambda, (v_i)_{i\in I}\Big) \mapsto (\lambda v_i)_{i\in I}.$$

Für $k \in I$ sei $\iota_k : V_k \to \bigoplus_{i\in I} V_i$ die Abbildung die für $v \in V_k$ durch

$$\iota_k(v) = (v_i)_{i\in I}$$

gegeben wird, wobei

$$v_i = \begin{cases} v & (i = k) \\ 0 & (i \neq k). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die direkte Summe die folgende universelle Eigenschaft hat: Wenn W ein Vektorraum über K und $f_i : V_i \to W$ für jedes $i \in I$ eine lineare Abbildung ist, dann gibt es eine eindeutige lineare Abbildung

$$f : \bigoplus_{i\in I} V_i \to W,$$

sodass

$$f \circ \iota_i = f_i \qquad (i \in I).$$

Zeigen Sie weiter, dass $\bigoplus_{i\in I} V_i$ bis auf Isomorphie der einzige Vektorraum mit dieser universellen Eigenschaft ist.

Hausaufgabe 10.1 Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es genau dann ein Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$$

gibt, wenn a und b teilerfremd sind.

Hausaufgabe 10.2 Zeigen Sie, dass jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe zyklisch ist.

Hausaufgabe 10.3 Sei V ein Vektorraum und I eine Menge. Für jedes $i \in I$, sei V_i ein Unterraum von V. Für eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$, setze

$$V_J := \operatorname{span}\Big(\bigcup_{j \in J} V_j\Big).$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$.

(ii) $V = \operatorname{span}\Big(\bigcup_{i \in I} V_i\Big)$ und $V_J \cap V_K = V_{J \cap K}$ für alle endliche Teilmengen J und K von I.

Hinweis für (ii) $\Rightarrow$ (i): Zeigen Sie, dass V die universelle Eigenschaft besitzt.