Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2025

Lineare Algebra 2

11. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 11.1 Sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Seien (T, π) und (T', π') Tensorprodukte mit universellen bilinearen Abbildungen $\pi : V \times W \to T$ und $\pi' : V \times W \to T'$. Zeigen Sie, dass T und T' isomorph sind als Vektorräume.

Präsenzaufgabe 11.2 Seien V und W Vektorräume über einem Körper K. Elemente der Form $v \otimes w$ mit $v \in V$ und $w \in W$ heißen elementare Tensoren. Seien $K = \mathbb{R}$, $V, W = \mathbb{R}^2$ und sei $\{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass

$$2e_1 \otimes e_1 - 2e_2 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_2$$

ein elementarer Tensor in $V \otimes W$ ist.

Präsenzaufgabe 11.3 Sei L ein Körper und K ein Unterkörper von L. Sei V ein Vektorraum über K. Zeigen Sie, dass $V \otimes_K L$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation

$$L \times V \otimes_K L \to V \otimes_K L, \quad \big(\lambda, \sum_{j=1}^{m} v_j \otimes \kappa_j\big) \mapsto \sum_{j=1}^{m} v_j \otimes \lambda\kappa_j$$

ein Vektorraum über L bildet. Zeigen Sie im Fall $V = K^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, dass $V \otimes_K L$ isomorph zu L^n ist.

Hausaufgabe 11.1 Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung mit Rang kleiner gleich 1. Zeigen Sie, dass $\lambda \in V^*$ und $w \in W$ existieren mit

$$T(v) = \lambda(v)w \qquad (v \in V).$$

Inwieweit sind λ und w eindeutig?

Hausaufgabe 11.2 Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und seien $v_1, v_2 \in V$ und $w_1, w_2 \in W$. Wann gilt $v_1 \otimes w_1 = v_2 \otimes w_2$?

Hausaufgabe 11.3 Seien V und W Vektorräume über einem Körper K.

(a) Zeigen Sie, dass $V \otimes W$ und $W \otimes V$ als Vektorräume zueinander isomorph sind.

(b) Zeigen Sie, dass $K \otimes V$ isomorph zu V ist.