

Lineare Algebra 2

12. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 12.1 Sei K ein Körper und seien V_1, V_2, W_1 und W_2 Vektorräume über K und $f_1 : V_1 \rightarrow W_1$ und $f_2 : V_2 \rightarrow W_2$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige lineare Abbildung

$$f_1 \otimes f_2 : V_1 \otimes V_2 \rightarrow W_1 \otimes W_2$$

gibt, sodass

$$f_1 \otimes f_2(v_1 \otimes v_2) = f_1(v_1) \otimes f_2(v_2) \quad (v_1 \in V_1, v_2 \in V_2).$$

Seien $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ Eigenvektoren von f_1 und f_2 zum Eigenwert $\lambda_1 \in K$, bzw. $\lambda_2 \in K$. Zeigen Sie, dass $v_1 \otimes v_2 \in V_1 \otimes V_2$ ein Eigenvektor von $f_1 \otimes f_2$ zum Eigenwert $\lambda_1 \lambda_2$ ist. Zeigen Sie weiter, dass $v_1 \otimes v_2$ ein Eigenvektor von $f_1 \otimes \text{Id}_{V_2} + \text{Id}_{V_1} \otimes f_2$ zum Eigenwert $\lambda_1 + \lambda_2$ ist.

Hausaufgabe 12.1 Seien U, V und W Vektorräume über einem Körper K . Zeigen Sie, dass $\text{Hom}(U, \text{Hom}(V, W))$ isomorph zu $\text{Hom}(U \otimes V, W)$ ist.

Hausaufgabe 12.2 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Die Begleitmatrix des Polynoms $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ ist die $n \times n$ -Matrix

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A_p .

Für ein monisches Polynom $p(x)$ vom Grad n (d.h. Koeffizient für x^n ist gleich 1), sei

$$T_p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad x \mapsto A_p x.$$

Sei $\overline{\mathbb{Q}} := \{z \in \mathbb{C} : \exists p(x) \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\} : p(z) = 0\}$ die Menge der algebraischen Zahlen.

(b) Folgern Sie aus (a) und Präsenzaufgabe 12.1, dass $\overline{\mathbb{Q}}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist.

Hinweis: Für gegebene monische Polynome $p(x)$ und $q(x)$ vom Grad n bzw. m , betrachten Sie die Abbildungen

$$\begin{aligned} T_p \otimes T_q &: \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m, \\ T_p \otimes \text{Id}_{\mathbb{C}^m} + \text{Id}_{\mathbb{C}^n} \otimes T_q &: \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m, \end{aligned}$$

und

$$T_p^{-1} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n,$$

falls T_p invertierbar ist.