Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Sommersemester 2025

Probeklausur
Lineare Algebra 2

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Sei $V := \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg\big(p(x)\big) \leq 4\}$ und sei

$$T : V \to V, \quad p(x) \mapsto 2p'(x) - p''(x)$$

Bestimmen Sie eine Jordan-Basis für T.

Aufgabe 2: (20 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei b eine antisymmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Wenn b nicht ausgeartet ist, dann ist n gerade.

(b) Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und

$$t : V^* \times W \to \operatorname{Hom}(V, W), \quad (\lambda, w) \mapsto \big(v \mapsto \lambda(v)w\big)$$

und sei $T : V^* \otimes W \to \operatorname{Hom}(V, W)$ die lineare Abbildung bestimmt durch

$$T(\lambda \otimes w) = t(\lambda, w) \qquad (\lambda \in V^*, w \in W).$$

Dann ist T ein Isomorphismus.

Aufgabe 3: (25 Punkte)
Seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^T A y$$

Bestimmen Sie eine Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, sodass

$$b\Big(\sum_{j=1}^{3} a_j v_j, \sum_{k=1}^{3} b_k v_k \Big) = \sum_{j=1}^{3} \epsilon_j a_j b_j \qquad (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}),$$

wobei $\epsilon_j \in \{\pm 1\}$ für $j = 1, 2, 3$.

Aufgabe 4: (15 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 17 und 23.

(b) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $p(x) = x^3 + x$ und $q(x) = x^2$.

Aufgabe 5: (15 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:
Die Gruppe $(\mathbb{Z}/90\mathbb{Z}, +)$ ist isomorph zur Gruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$.