

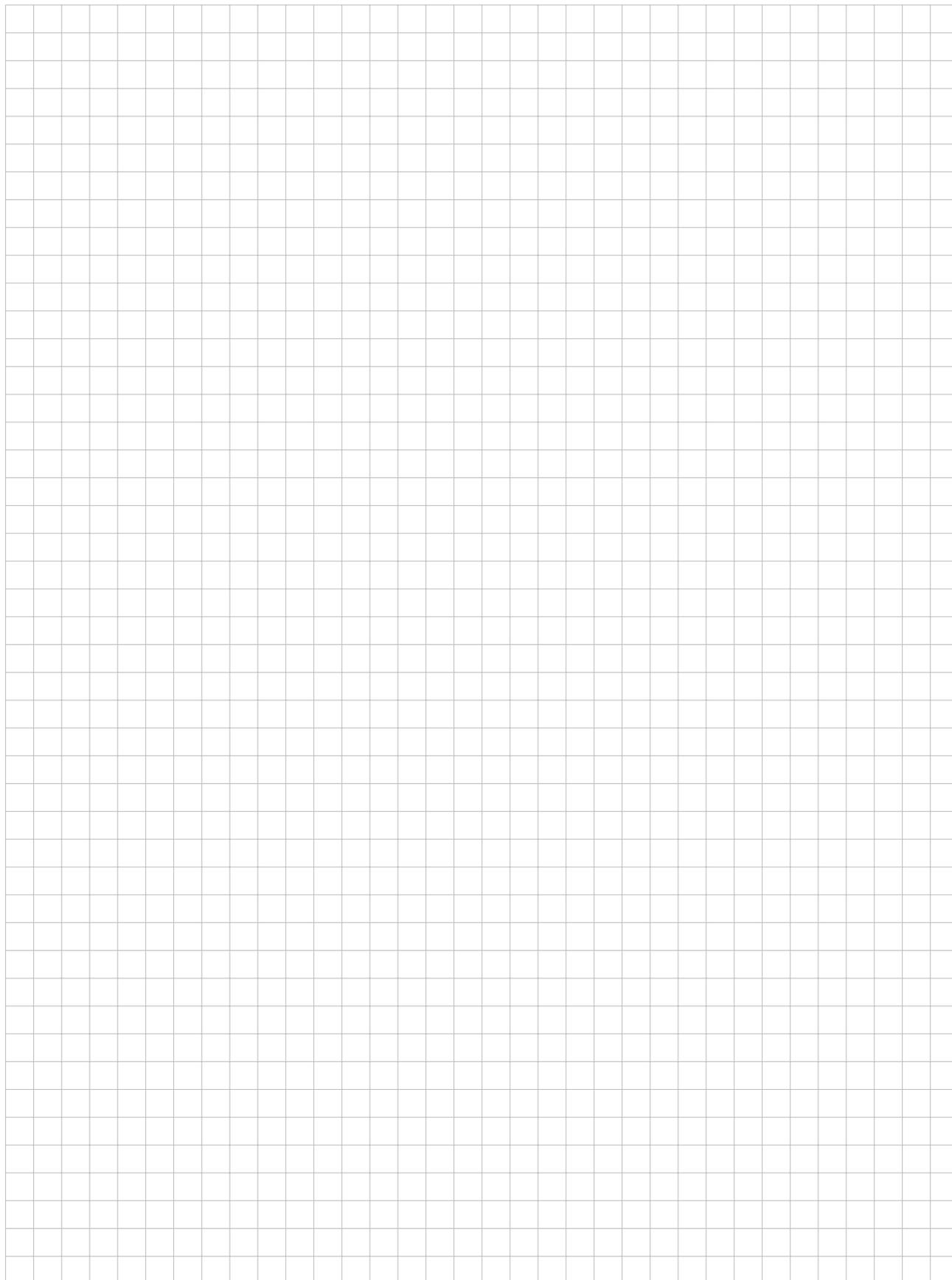
# Probeklausur Lineare Algebra 2

**Aufgabe 1:** (25 Punkte)

Sei  $V := \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : \deg(p(x)) \leq 4\}$  und sei

$$T : V \rightarrow V, \quad p(x) \mapsto 2p'(x) - p''(x)$$

Bestimmen Sie eine Jordan-Basis für  $T$ .



**Aufgabe 2:** (20 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei  $b$  eine antisymmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{R}^n$ . Wenn  $b$  nicht ausgeartet ist, dann ist  $n$  gerade.

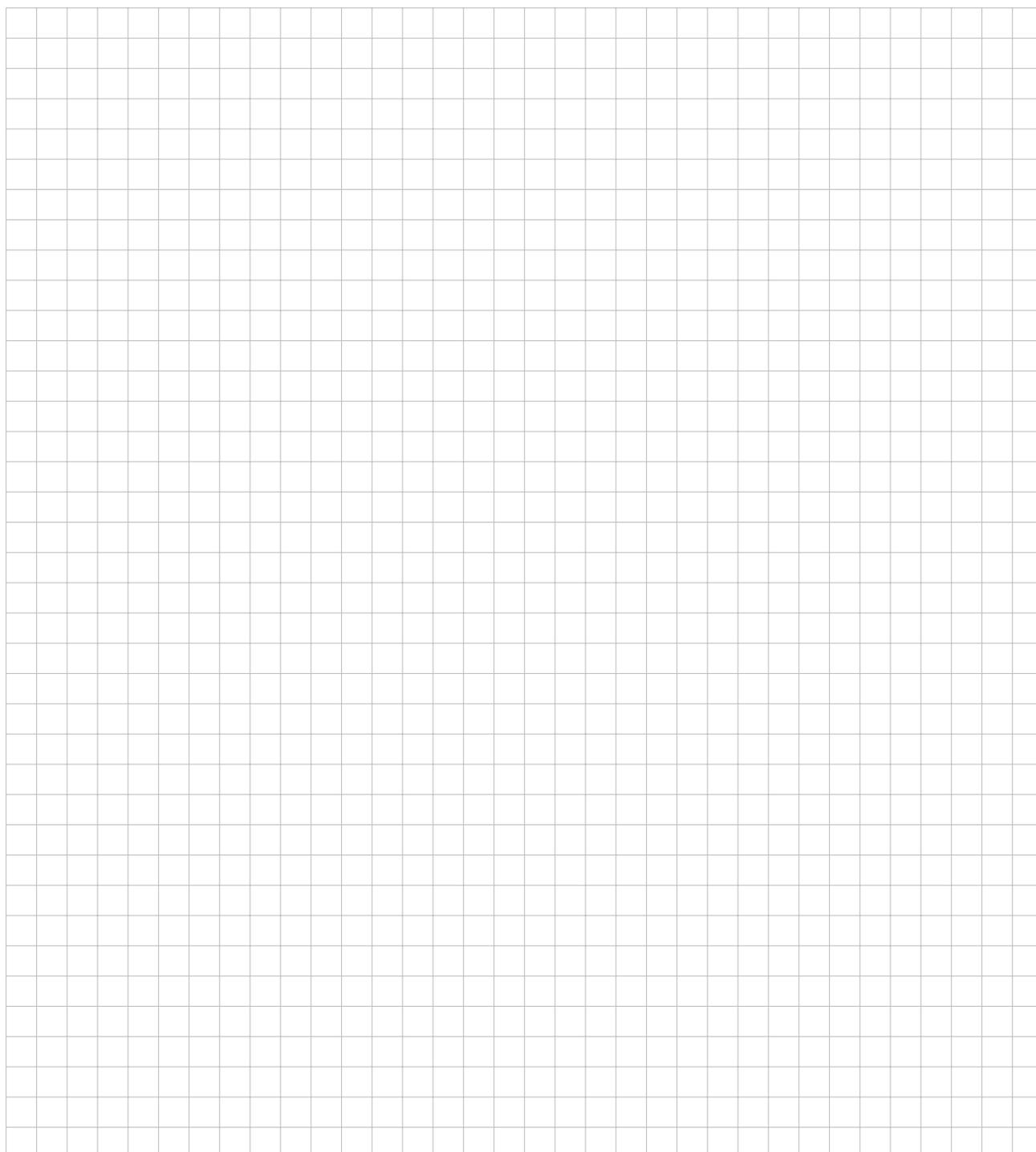
(b) Seien  $V$  und  $W$  Vektorräume über einem Körper  $K$  und

$$t : V^* \times W \rightarrow \text{Hom}(V, W), \quad (\lambda, w) \mapsto (v \mapsto \lambda(v)w)$$

und sei  $T : V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$  die lineare Abbildung bestimmt durch

$$T(\lambda \otimes w) = t(\lambda, w) \quad (\lambda \in V^*, w \in W).$$

Dann ist  $T$  ein Isomorphismus.



**Aufgabe 3:** (25 Punkte)

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

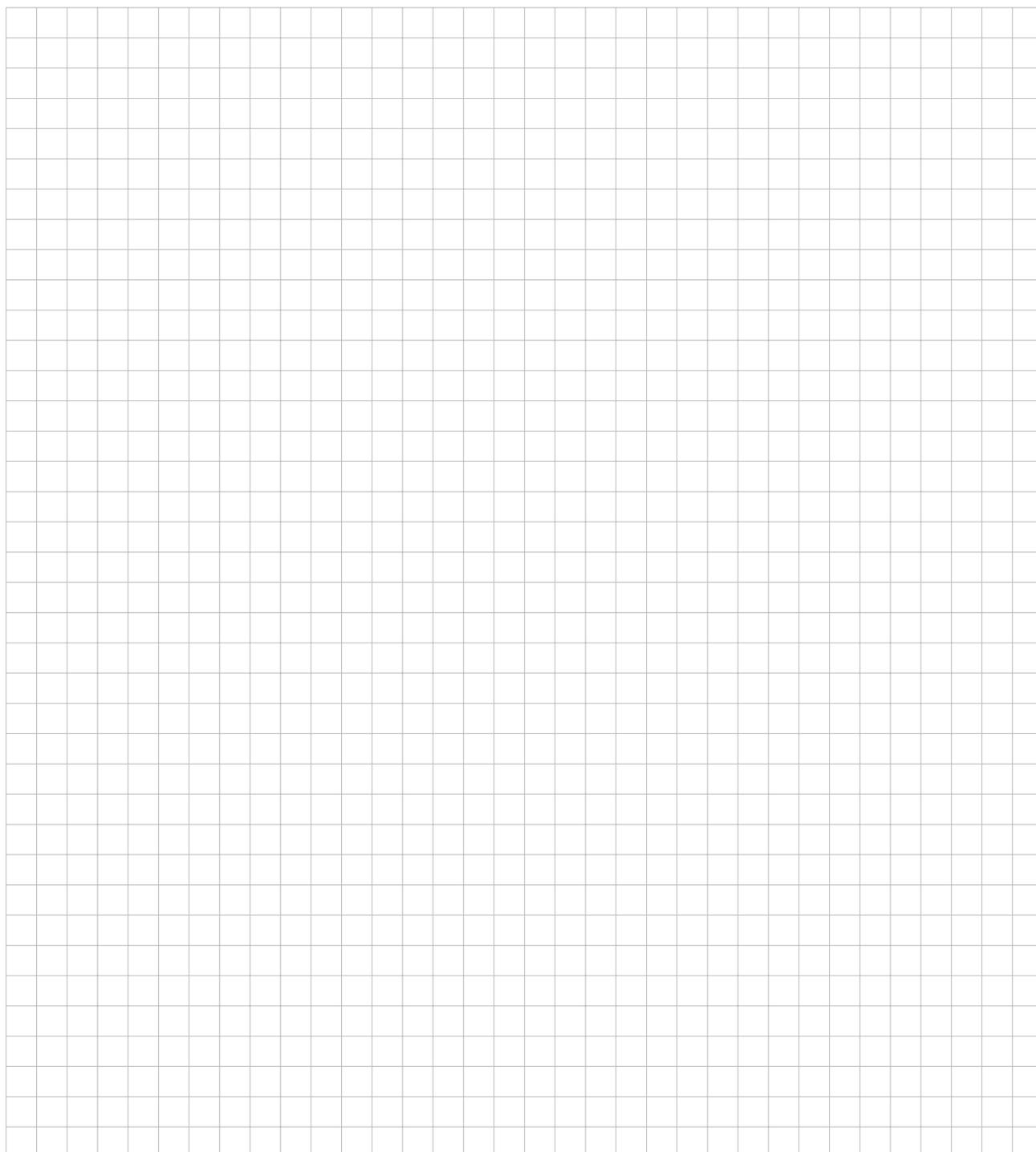
und

$$b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^T A y$$

Bestimmen Sie eine Basis  $\{v_1, v_2, v_3\}$  von  $\mathbb{R}^3$ , sodass

$$b\left(\sum_{j=1}^3 a_j v_j, \sum_{k=1}^3 b_k v_k\right) = \sum_{j=1}^3 \epsilon_j a_j b_j \quad (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}),$$

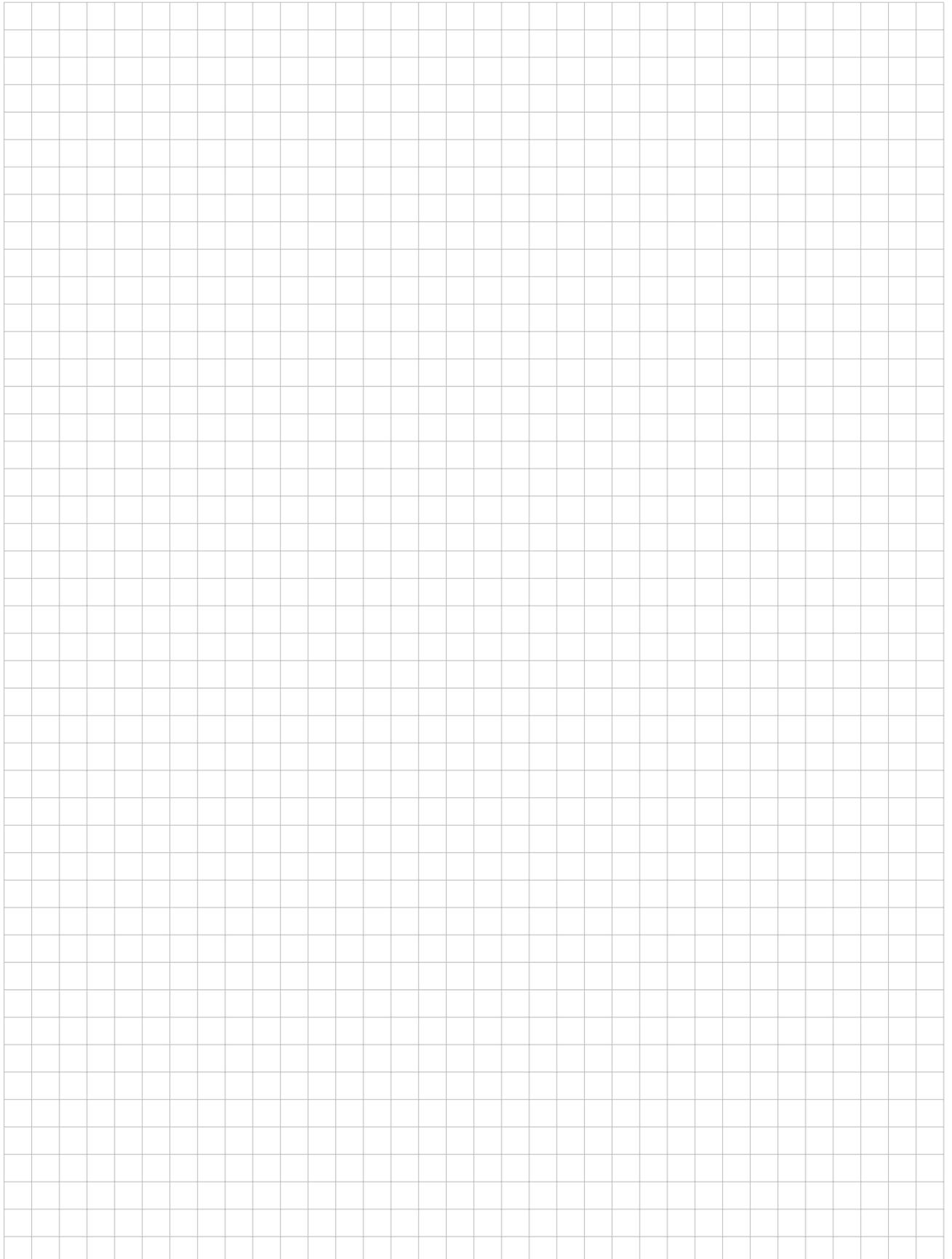
wobei  $\epsilon_j \in \{\pm 1\}$  für  $j = 1, 2, 3$ .



**Aufgabe 4:** (15 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 17 und 23.

(b) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von  $p(x) = x^3 + x$  und  $q(x) = x^2$ .



**Aufgabe 5:** (15 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

Die Gruppe  $(\mathbb{Z}/90\mathbb{Z}, +)$  ist isomorph zur Gruppe  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ .

