Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel Wintersemester 2022/2023

Modellieren und Anwendungen

10. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 10.1 Heckman Skript Aufgabe 8.2 S.53

Präsenzaufgabe 10.2 Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eine glatte Kurve, $V, f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit V differenzierbar und $V' = -f$ und $m > 0$. Nehmen Sie an, dass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$m\ddot{\gamma}(t) = f(\|\gamma(t)\|)\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} \qquad (t \in I).$$

Betrachten Sie die Funktion

$$H : I \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{m\|\dot{\gamma}(t)\|^2}{2} + V(\|\gamma(t)\|).$$

Zeigen Sie, dass $\dot{H}(t) = 0$ für alle $t \in I$. H wird totale Energie oder Hamiltionian genannt.

Hausaufgabe 10.1 Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eine glatte Kurve und $m, k > 0$. Nehmen Sie an, dass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$m\ddot{\gamma}(t) = -k\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|^3} \qquad (t \in I).$$

Betrachten Sie den Lenz-Vektor

$$K : I \to \mathbb{R}^3, t \mapsto p(t) \times L(t) - km\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|},$$

wobei $p : I \to \mathbb{R}^3, t \mapsto m\dot{\gamma}(t)$ der lineare Impuls und $L : I \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \gamma(t) \times p(t)$ der Drehimpuls ist. Zeigen Sie, dass $\dot{K}(t) = 0$ für alle $t \in I$ gilt.
(Hinweis: Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt}(p(t) \times L(t)) = -\frac{km}{\|\gamma(t)\|^3}\gamma(t) \times \big(\gamma(t) \times \dot{\gamma}(t)\big)$$

und

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}\right) = -\frac{\langle\dot{\gamma}(t), \gamma(t)\rangle\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|^3} + \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\gamma(t)\|}$$

für alle $t \in I$ gilt.