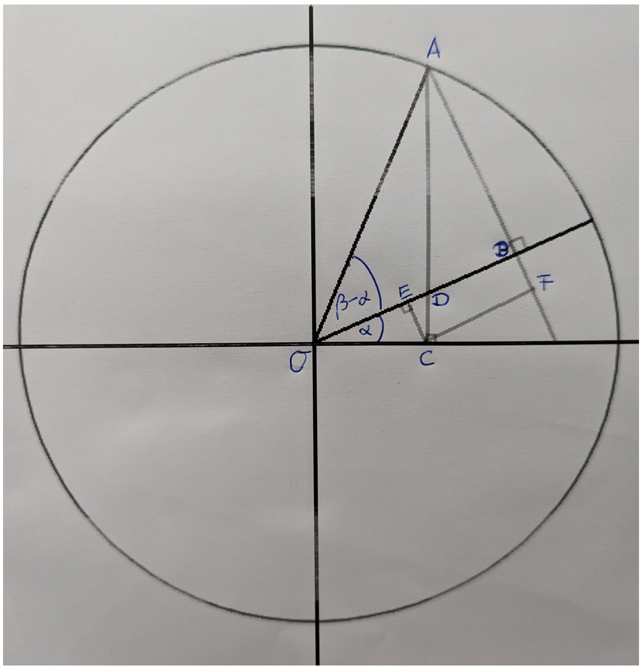
Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 2022/2023

Modellieren und Anwendungen

2. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 2.1 Sei $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Betrachten Sie die folgende Konstellation:



Zeigen Sie die Identitäten

$$\sin(\beta - \alpha) = \cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta)$$

und

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\angle BAC = \angle DCE = \alpha$, $\|O-C\| = \cos(\beta)$ und $\|A-C\| = \sin(\beta)$ gilt.

Für welche Winkel α, β kann man hieraus die Additionstheoreme herleiten?

Präsenzaufgabe 2.2 Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ und α der Winkel zwischen u und v. Zeigen Sie, dass dann

$$\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|\cos(\alpha)$$

gilt.

(Hinweis: Siehe Heckman Skript, Theorem 1.2 S.7 - verwendet die Kosinusregel aus Hausaufgabe 2.2.)

Hausaufgabe 2.1 Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

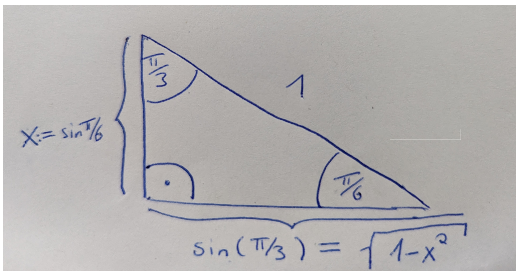
(i) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

(ii) $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(iii) $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

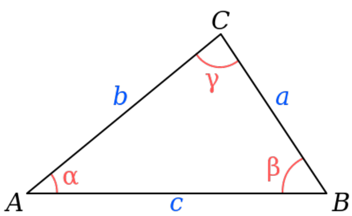
(iv) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Hinweis: (i) folgt aus der Definition, (ii) folgt aus (i), (iv) folgt aus (iii). Vorschlag für (iii): Betrachten Sie die Konstellation



und verwenden Sie die Additionstheoreme der Sinusfunktion

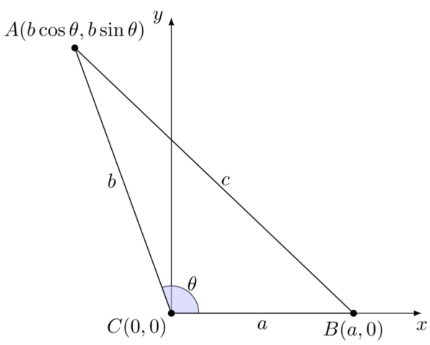
Hausaufgabe 2.2 Es sei das folgende Dreieck gegeben:



Zeigen Sie die Kosinusregel

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab\cos(\gamma).$$

Vorschlag: Zeigen Sie, dass Sie annehmen können, dass das Dreieck in folgender Form gegeben ist (dann ist $\theta = \gamma$.)



Stellen Sie anschließend eine Formel für die Länge der Seite c in Abhängigkeit von θ auf und quadrieren Sie den Ausdruck.