Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 2022/2023

Modellieren und Anwendungen

4. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 4.1 Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{36} + 5x^4 - x + \pi$

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{x^2}$

(iii) $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ und wenden Sie die Kettenregel auf die Identität $g \circ f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ an.)

(iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x^2)e^{\sqrt{2+\sin(3x)}}$.

Präsenzaufgabe 4.2 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f zweimal differenzierbar, falls f differenzierbar und dessen Ableitung $f^{(1)}$ ebenfalls differenzierbar ist mit Ableitung $f^{(2)}$. Entsprechend wird f dreimal, viermal, ... n-mal differenzierbar genannt und die n-te Ableitung wird mit $f^{(n)}$ bezeichnet. Zeigen die Leibniz Regel:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ n-fach differenzierbar. Dann gilt

$$(fg)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}.$$

Hausaufgabe 4.1

(i) $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$ (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto e^x$ und wenden Sie die Kettenregel auf die Identität $g \circ f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ an.)

(ii) $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{\ln(3 + \sin(4\sqrt{x}))}$

Hausaufgabe 4.2

(i) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$. (Hinweis: Wenden Sie die Produktregel auf die Identität $xf(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ an.)

(ii) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Sei $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Zeigen Sie, dass $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.