Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 2022/2023

Modellieren und Anwendungen

6. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 6.1 Seien $a > b > 0$, $c > 0$ gegeben durch $a^2 = b^2 + c^2$, $e = \frac{c}{a}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen:

(i) $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = e \left| x - \frac{a^2}{c} \right| \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

(ii) $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = e \left| x - \frac{a^2}{c} \right| \iff \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 2a.$

Präsenzaufgabe 6.2 Sei $\mathcal{E}$ eine Ellipse in $\mathbb{R}^2$ und $v \in \mathcal{E}$. Zeigen Sie, dass die Tangente an $\mathcal{E}$ durch v die einzige Gerade L durch V ist mit $L \cap \mathcal{E} = \{v\}$.

Hausaufgabe 6.1 Sei $\mathcal{E}$ eine Ellipse mit Brennpunkten f_1 und f_2. Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}$ genau dann ein Kreis ist, wenn für jeden Punkt $v \in \mathcal{E}$ die Richtung der Tangente an $\mathcal{E}$ durch v senkrecht auf $v - \frac{f_1+f_2}{2}$ ist.

Hausaufgabe 6.2

(i) Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, $\phi : I \to J$ und $\gamma : J \to \mathbb{R}^2$ glatt und $\delta = \gamma \circ \phi$. Zeigen Sie die Identität

$$\|\delta'(t)\| = \|\gamma'(\phi(t))\| \; |\phi'(t)|$$

für alle $t \in I$.

(ii) Geben Sie eine glatte Abbildung $\delta : J \to \mathbb{R}^2$ auf einem offenen Intervall, welches $[0, 1]$ enthält mit den folgenden Eigenschaften an:

(a) $\mathrm{Bild}(\delta) = \mathbb{S}^1$

(b) $\delta(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\delta'(0)\| = 2$

(c) $\delta(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \|\delta'(1)\| = \pi.$