

Modellieren und Anwendungen

7. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 7.1

- (i) Berechnen Sie die Perioden der Peri/Apozentren des Epizykels aus Hausaufgabe 7.1.
- (ii) Wieviele Peri/Apozentren durchläuft Saturn pro Jahr im Orbit um die Erde? (siehe Heckman Skript S.78 für relevante Daten zur Berechnung)

Präsenzaufgabe 7.2 Welche geometrischen Formen ergeben sich für die restlichen Winkel ϕ für $F_\phi \cap K$ aus Hausaufgabe 7.2?

Hausaufgabe 7.1 Es seien $r_1, r_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ mit $r_1 > r_2 > 0$ und der Epizykel

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto r_1 \begin{pmatrix} \cos(w_1 t) \\ \sin(w_1 t) \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} \cos(w_2 t) \\ \sin(w_2 t) \end{pmatrix}$$

gegeben.

- (i) Zeigen Sie, dass

$$\|\gamma(t)\|^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos((w_1 - w_2)t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

- (ii) Welche einfache Form nimmt der Epizykel γ für $w_1 = w_2$ an?
- (iii) Es sei $w_1 \neq w_2$. Zeigen Sie, dass $\|\gamma(t)\|$ genau dann minimal wird, wenn $t \in \frac{\pi}{w_1 - w_2} + \frac{2\pi}{w_1 - w_2} \mathbb{Z}$ gilt. Die Punkte $\gamma(t)$ mit $\|\gamma(t)\|$ minimal, werden Perizentren von γ genannt.
- (iv) Es sei $w_1 \neq w_2$. Zeigen Sie, dass $\|\gamma(t)\|$ genau dann maximal wird, wenn $t \in \frac{2\pi}{w_1 - w_2} \mathbb{Z}$ gilt. Die Punkte $\gamma(t)$ mit $\|\gamma(t)\|$ maximal, werden Apozentren von γ genannt.

Hausaufgabe 7.2 Es sei

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0 \right\}$$

und

$$F_\phi := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

für $\phi \in [0, 2\pi)$.

- (i) Zeichnen Sie K und F_ϕ für $\phi = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2$ in ein Koordinatensystem.
- (ii) Berechnen Sie für welche $\phi \in [0, 2\pi)$ der Schnitt $K \cap F_\phi$ von K und F_ϕ eine Ellipse ist.