Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Jannik Michel

Wintersemester 2022/2023

Modellieren und Anwendungen

8. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 8.1

(i) Verifizieren Sie das dritte Gesetz von Kepler, welches besagt, dass T^2/r^3 für alle Planeten gleich ist, wobei T die Umlaufzeit des Planeten um die Sonne und r der (maximale) Abstand des Planeten zur Sonne ist, anhand der Daten auf Seite 78.

(ii) Nehmen Sie an dass der Orbit eines Planeten um die Sonne gegeben ist durch $t \mapsto r \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$, wobei $r > 0$ und $\omega > 0$. Zeigen Sie unter der Annahme der Gültigkeit des dritten Gesetzes von Kepler, dass eine Konstante $c > 0$ existiert mit

$$r\omega = \frac{c}{\sqrt{r}}.$$

(iii) Zeigen Sie, dass der Orbit eines Planeten um die Erde eine epizyklische Kurve ist, die sowohl Abschnitte mit prograder als auch retrograder Bewegung besitzt.

Präsenzaufgabe 8.2 Es sei

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto r_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) \\ \sin(\omega_1 t) \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t) \\ \sin(\omega_2 t) \end{pmatrix}$$

mit $r_1 > r_2 > 0$ und $\omega_1, \omega_2 > 0$ eine epizyklische Kurve. Nehmen Sie an, dass $v_1 = r_1\omega_1 < r_2\omega_2 = v_2$ gilt. Zeigen Sie, dass ein Übergang zwischen prograder und retrograder Bewegung genau dann stattfindet, wenn $t \in \mathbb{R}$ die Bedingung

$$\cos((\omega_1 - \omega_2)t) = \frac{r_1 v_1 + r_2 v_2}{r_1 v_2 + r_2 v_1}$$

erfüllt.

Hausaufgabe 8.1 Heckman Skript Ex. 4.2.

Hausaufgabe 8.2 Es sei

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto r_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) \\ \sin(\omega_1 t) \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t) \\ \sin(\omega_2 t) \end{pmatrix}$$

mit $r_1 > r_2 > 0$ und $\omega_1, \omega_2 > 0$ eine epizyklische Kurve.

Zeigen Sie die Identität

$$\left\langle \gamma'(t), \begin{pmatrix} -\gamma_2(t) \\ \gamma_1(t) \end{pmatrix} \right\rangle = r_1^2\omega_1 + r_2^2\omega_2 + r_1 r_2(\omega_1 + \omega_2)\cos((\omega_1 - \omega_2)t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.