Universität Paderborn Wintersemeseter 25/26
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz
Dr. Job Kuit

Seminar

Zentrale einfache Algebren und Brauergruppen

Wir befassen uns mit endlichdimensionalen Algebren A über einem Körper K. Eine solche Algebra heißt einfach, falls alle beidseitigen Ideale trivial sind. Dann gilt

$$A \simeq M_{n\times n}(D) \tag{1}$$

für einen Schiefkörper alias Divisionsalgebra D über K, und zwar mit D und n eindeutig [1, Kap.1]. Von nun an sei A einfach. Das Tensorprodukt zweier einfacher K-Algebren in der Regel nicht mehr einfach mit $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ als elementares Gegenbeispiel (betrachte $\mathbb{C}$ als einfache $\mathbb{R}$-Algebra). Das Zentrum von A wird definiert als

$$\mathcal{Z}(A) = \{a \in A \mid \forall b \in A : ba = ab\}$$

und wir nennen A *zentral einfach*, falls $\mathcal{Z}(A) = K$. Die nächste Stufe der Erkenntnis ist, daß K-Tensorprodukte zentral einfacher K-Algebren wieder zentral einfach sind, wir demnach eine assoziative Multiplikation auf dem Raum aller zentral einfachen Algebren erhalten [1, Kap. 2]. Von nun an seien alle Algebren zentral einfach. Wir nennen zentral einfache Algebren Brauer-äquivalent, falls sie den gleichen Schiefkörper D in (1) aufweisen. Obige assoziative Multiplikation faktorisiert und eine Gruppenstruktur auf dem Raum aller zentral einfachen Divisionsalgebren über K kommt überraschend zum Vorschein, die sogenannte Brauergruppe $\mathrm{Br}(K)$ [1, Kap. 3] ersteht. Klassische Resultate sind nun $\mathrm{Br}(K) = \mathbf{1}$ für K endlich, d.h. jeder endliche Schiefkörper ist kommutativ (Wedderburn), oder auch $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, i.e. die einzige nicht kommutative Divisionsalgebra über $\mathbb{R}$ sind die Quaternionen $\mathbb{H}$ (Frobenius), siehe [1, Kap. 6]. Das soll es vorerst gewesen sein, mehr in der Vorbesprechung. Grob geht es darum, den Stoff of [1, Kap. 1 - 10] oder [2, Part II] in Auszügen zu behandeln.

Literatur

[1] I. Kersten, *Brauergruppen*, Universitätsverlag Göttingen, frei erhältlich

[2] P. Guillot, *A gentle course in local class field theory*, Cambridge University Press

Organisatorisches:

- Alle Vorträge sind möglichst frei, d.h. ohne Manuskript, und an der Tafel zu halten.
- Die **Vorbesprechung** mit verbindlicher Themenvergabe findet am Montag, den 14. Juli von 16.45 - 17.30 Uhr in D1 statt.