8. Übungsblatt - Lie Gruppen 2

Besprechung am 03.12.2021

Aufgabe 1 Sei G eine kompakte halbeinfache Lie Gruppe mit Lie Algebra $\mathfrak{g}$, maximalem Torus $\mathfrak{t}$, Menge von Wurzeln Σ und Weyl Gruppe $W(\Sigma)$.

(i) Sei Σ^+ eine Wahl von positiven Wurzeln und $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\alpha$. Zeigen Sie: Ist $\alpha \in \Sigma^+$ einfach, dann gilt $s_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$ und $2\frac{\langle\delta,\alpha\rangle}{|\alpha|^2} = 1$.

(ii) In $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ gilt $[X, Y^n] = nY^{n-1}(H - (n-1))$, wobei (H, X, Y) das standard $\mathfrak{sl}_2$ Tripel bezeichnet.

(iii) Sei $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{C}}$, $\alpha \in \Sigma^+$ einfach und $m = 2\frac{\langle\lambda,\alpha\rangle}{|\alpha|^2} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Sei $v_{\lambda-\delta}$ der kanonische Erzeuger des Verma Moduls $V(\lambda)$ und $M \subset V(\lambda)$ das $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ Untermodul, welches von $E^m_{-\alpha}v_{\lambda-\delta}$ erzeugt wird, wobei $0 \neq E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\alpha}$. Zeigen Sie, dass M ein höchstes Gewicht Modul bezüglich des Gewichts $\lambda - \delta - m\alpha$ ist. Weshalb ist im Fall $m > 0$, M ein echtes Untermodul von $V(\lambda)$?

[Hinweis: Es darf verwendet werden, dass die Abbildung $U(\mathfrak{n}^-) \to V(\lambda), u \mapsto u(1 \otimes 1)$ eine lineare Bijektion ist (dies ist eine Konsequenz des Satzes von Poincaré-Birkhoff-Witt).]

Sei nun $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{C}}$ reellwertig auf $i\mathfrak{t}$, dominant und algebraisch integral. Sei $V(\lambda+\delta)$ das Verma Modul zum höchsten Gewicht λ, S der maximale echte $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ Untermodul von $V(\lambda+\delta)$ und $L(\lambda+\delta) = V(\lambda+\delta)/S$. Wir wissen bereits, dass $L(\lambda+\delta)$ ein irreduzibles höchstes Gewichtsmodul zum Gewicht λ ist. Das Ziel ist nun zu zeigen, dass unter den Bedingungen an λ, $L(\lambda+\delta)$ zusätzlich endlich dimensional ist. Sei hierzu v_λ ein höchster Gewichtsvektor in $L(\lambda+\delta)$.

(iv) Zeigen Sie, dass für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Sigma^+$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $E^n_{-\alpha}v_\lambda = 0$, wobei $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\alpha}$.

(v) Zeigen Sie, dass $W(\Sigma)(\Lambda(L(\lambda+\delta))) = \Lambda(L(\lambda+\delta))$. Zeigen Sie hierzu:

(v.i) Ist $\alpha \in \Sigma^+$ einfach und $\mathfrak{sl}_2(\alpha)$ das von α induzierte $\mathfrak{sl}_2$ Tripel in $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, so ist $L(\lambda+\delta)$ die direkte Summe von endlich dimensionalen irreduziblen $\mathfrak{sl}_2(\alpha)$ Untermoduln.

(v.ii) Zeigen Sie mit Hilfe von (v.i), dass $\Lambda(L(\lambda+\delta))$ invariant unter s_α ist für jede einfache Wurzel $\alpha \in \Sigma^+$.

(vi) Zeigen Sie, dass die Menge der dominanten Gewichte von $L(\lambda+\delta)$ endlich ist und folgern Sie, dass $L(\lambda+\delta)$ endlich dimensional ist.