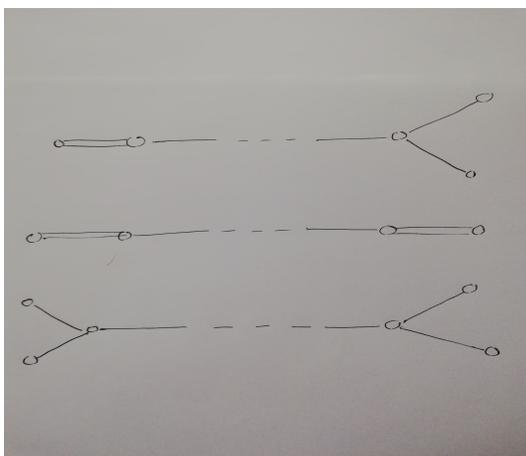


9. Übungsblatt - Lie-Gruppen 2

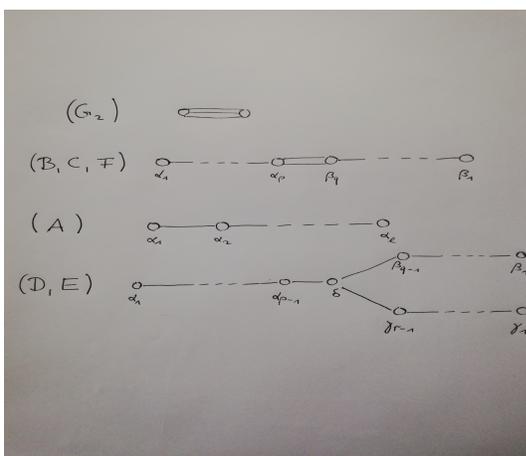
Besprechung am 17.12.2021

Aufgabe 1 Ziel dieser Aufgabe ist es bis auf Isomorphie alle abstrakten zusammenhängenden Dynkin Diagramme zu bestimmen.

- (a) Zeigen Sie, dass ein abstraktes Dynkin Diagramm die folgenden Konfigurationen nicht enthalten kann:



- (b) Zeigen Sie, dass jedes zusammenhängende abstrakte Dynkin Diagramm von einer der folgenden Formen sein muss:



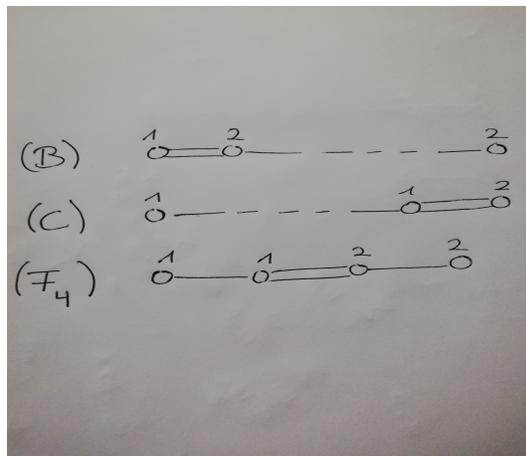
(c) Zeigen Sie, dass bis auf eine Konstante die Gewichte gegeben sind durch

(A), (D,E) $w_i \equiv 1$

(B,C,F) $w_{\alpha_1} = \dots = w_{\alpha_p} = 1, w_{\beta_q} = \dots = w_{\beta_1} = 2.$

(G₂) $w_1 = 1, w_2 = 3$

(d) Zeigen Sie, dass im Fall (B,C,F) das Diagramm von einer der folgenden Formen sein muss:



Tipp: Zeigen Sie, dass es genügt $(p-1)(q-1) < 2$ zu zeigen (für die Definition von p und q siehe Bild in (b)). Zeigen Sie diese Ungleichung anschließend mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung.

(e) Im Fall (D,E) kann man $p \geq q \geq r$ annehmen. Zeigen Sie, dass dann die einzigen Möglichkeiten

$$r = 2, q = 2, p \geq 2 \quad (D)$$

und

$$r = 2, q = 3, p = 3, 4, 5 \quad (E)$$

sind.

Zeigen Sie nun, dass die abstrakten zusammenhängenden Dynkin Diagramme gegeben sind durch A_n für $n \geq 1$, B_n für $n \geq 2$, C_n für $n \geq 3$, D_n für $n \geq 4$, E_6, E_7, E_8, F_4 und G_2 .