Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Sommersemester 2023

Mannigfaltigkeiten

3. Übung

Aufgabe 3.1 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_n \\ -\mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$.

Zeigen Sie, dass die symplektische Gruppe

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) := \{g \in \mathrm{Mat}_{2n\times 2n}(R) : g^T \Omega g = \Omega\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Sl}(2n, \mathbb{R})$ von Dimension $n(2n + 1)$ ist.

Aufgabe 3.2 Es sei

$$N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3\} \subset \mathbb{R}^2$$

die Neilsche Parabel. Zeigen Sie, dass N keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 3.3 Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, t \mapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t}).$$

Zeigen Sie, dass γ eine injektive Immersion mit dichtem Bild ist und dass $\gamma(\mathbb{R})$ keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ist.

Aufgabe 3.4 Sei M eine nicht leere kompakte glatte Mannigfaltigkeit und $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, dass keine glatte Submersion $F : M \to \mathbb{R}^k$ existiert.