Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Sommersemester 2023

Mannigfaltigkeiten

4. Übung

Aufgabe 4.1 Zeigen Sie, dass das Tangentialbündel $T(\mathbb{S}^1)$ des Einheitskreises diffeomorph zu $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 4.2 Sei X ein topologischer Raum und $f, g : X \to X$ stetig. Dann heißen f und g homotop, falls eine stetige Abbildung

$$H : X \times [0,1] \to X$$

existiert mit $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ ungerade. Nach Blatt 2 Problem 6 (ii) existiert auf $\mathbb{S}^k$ ein nicht verschwindendes glattes Vektorfeld v. Konstruieren Sie mit Hilfe des normierten Vektorfelds $v/\|v\|$ eine Homotopie zwischen der Identität auf $\mathbb{S}^k$ und der antipodalen Abbildung $-\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^k}$.

Aufgabe 4.3 Sei $N \in \mathbb{N}$ und $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^N$ von Dimension $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass das Einheitssphärenbündel

$$S(M) = \{(x,v) \in TM \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : \|v\| = 1\}$$

eine $2k-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von TM ist.

Aufgabe 4.4 Betrachten Sie den linearen Raum

$$M := \left\{ (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{x_j^2}{j^2} < \infty \right\}.$$

Zeigen Sie, dass M als Hilbertraum isomorph zu $l^2(\mathbb{N})$ ist.

Betrachten Sie die glatte Abbildung

$$f : M \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{j\in\mathbb{N}} (3x_j^2 - 2x_j^3)/2^j.$$

Seien $C \subset M$ die kritischen Punkte von f. Zeigen Sie, dass $[0,1] \subseteq f(C)$ und damit der Satz von Sard für M nicht gilt.