Universität Paderborn Sommersemester 2023
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Mannigfaltigkeiten

5. Übung

Aufgabe 5.1 Sei X eine Mannigfaltigkeit mit Rand, Y eine Mannigfaltigkeit ohne Rand und $Z \subset Y$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von Y ohne Rand. Sei außerdem $f : X \to Y$ glatt, sodass sowohl f, als auch $\partial f : \partial X \to Y$ transversal bezüglich Z sind.

Zeigen Sie, dass in diesem Fall $f^{-1}(Z)$ eine (eingebettete) Untermannigfaltigkeit von X ist mit Rand

$$\partial f^{-1}(Z) = f^{-1}(Z) \cap \partial X$$

und $\dim(X) - \dim(f^{-1}(Z)) = \dim(Y) - \dim(Z)$.

(siehe zum Beispiel **Guillemin und Pollack S.60**)

Aufgabe 5.2 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Nehmen Sie an, dass eine stetige Abbildung $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ existiert mit $f|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Zeigen Sie, dass dann auch eine glatte Abbildung mit den gleichen Eigenschaften existiert.

Beweisen Sie anschließend den Browerschen Fixpunktsatz mit Hilfe des Satzes von Sard.

[Hinweis: Zeigen Sie, dass eine Testfunktion $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ existiert, sodass $g := (\phi * f)|_{\mathbb{D}^n}$ nicht verschwindet und folgern Sie, dass $\frac{g}{\|g\|}$ die Anforderungen erfüllt.)

Aufgabe 5.3 Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung zwischen einer Mannigfaltigkeit X mit Rand und einer Mannigfaltigkeit Y ohne Rand. Zeigen Sie, dass fast jeder Punkt in Y ein regulärer Wert von f als auch von ∂f ist.