Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Sommersemester 2023

Mannigfaltigkeiten

8. Übung

Aufgabe 8.1 Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Zeigen Sie, dass eine eindeutige lineare Abbildung $i_X : \Omega(M) \to \Omega(M)$ existiert mit

(i) $i_X(\Omega^k(M)) \subset \Omega^{k-1}(M)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $\Omega^{-1}(M) := \{0\}$.

(ii) $i_X(\beta \wedge \gamma) = (i_X(\beta) \wedge \gamma) + (-1)^p(\beta \wedge i_X(\gamma))$ für alle $\beta \in \Omega^p(M)$ und $\gamma \in \Omega(M)$.

(iii) $i_X(\omega) = \omega(X)$ für alle $\omega \in \Omega^1(M)$.

[Hinweis: Zeigen Sie, dass die Vorschrift $i_X(\omega)(Y_1, \ldots, Y_k) := \omega(X, Y_1, \ldots, Y_k)$ die Bedingungen erfüllt, falls $\omega \in \Omega^{k+1}(M)$ und $Y_1, \ldots, Y_k \in \mathfrak{X}(M)$.)

Aufgabe 8.2 Seien M und X wie in Aufgabe 8.1 und d die äußere Ableitung. Zeigen Sie Cartan's Zauberformel:

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X.$$