DEUTSCHE MATHEMATIKER-VEREINIGUNG E.V.

Frühjahr 1976

DENKSCHRIFT

Zum Mathematikunterricht an Gymnasien

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV) weist hiermit öffentlich auf die unzulängliche mathematische Vorbildung der meisten Studienanfänger hin. In einer immer mehr der Mathematisierung unterworfenen Welt wirkt sich Hilflosigkeit gegenüber mathematischen Gedanken und Methoden - vornehmlich für Schulabgänger, die nicht Mathematik studieren - verhängnisvoll aus. Immer mehr jungen Menschen droht die Gefahr, in Ausbildung oder Beruf wegen zu schmaler mathematischer Vorbildung zu scheitern. Der Fachverband der deutschen Mathematiker legt daher mit dieser Denkschrift kommentierte Forderungen vor, die an jeden Abiturienten gestellt werden müssen, sinngemäß aber alle Schulabgänger betreffen. Diese Basis darf nicht reduziert werden: weitergehende Ziele sind nach wie vor notwendig - sie sind jedoch ohne diese Basis wertlos und kein Alibi für deren Vernachlässigung.

Die DMV fordert, daß alle Reformen und Veränderungen unseres Bildungswesens diesen Kern respektieren: er muß einerseits unabhängig vom Reformstand der jeweiligen Schulart für alle Schüler verbindlich sein, andererseits muß die Ausbildung der Lehrer diese befähigen, den Schülern den Kern so zu vermitteln, daß die vitalen Prinzipien und Bezüge der Mathematik dabei deutlich werden. Das erfordert für die Mathematiklehrer aller Schularten eine gute und vor allem in Mathematik genügend umfangreiche Ausbildung und Fortbildung.

Die DMV hofft, daß diese Denkschrift von allen zuständigen Instanzen, Institutionen und Persönlichkeiten als konstruktiver Beitrag zu einer notwendigen Korrektur unseres Bildungswesens verstanden wird. Sie bietet für die Durchführung ihre Hilfe an.

Grundsätzliche Bemerkungen

Die einzelnen Abschnitte dieser Denkschrift können nicht unabhängig voneinander sondern nur im Zusammenhang gesehen werden. In diesem ersten Abschnitt werden Gesichtspunkte genannt, die bei der Auswahl der im folgenden Teil skizzierten Inhalte beachtet wurden, und Aspekte, die beim Unterrichten berücksichtigt werden sollten.

Die DMV begrüßt es, daß die in den Schulen gelehrte Mathematik an begrifflicher Klarheit gewonnen hat. Jedoch muß das Verständnis der für ein Gebiet typischen Probleme, Grundgedanken und Methoden, das Verständnis des Inhalts eines Satzes und der Grundidee eines Beweises unbedingt den Vorrang behalten vor formaler Exaktheit und Vollständigkeit, die ohnehin im jeweiligen Kenntnisstand der Schüler und in ihrer Aufnahmefähigkeit Grenzen finden und nur schrittweise erreicht werden können. Die Schüler sollen die Notwendigkeit eines Beweises sehen; deshalb ist beim Beweis von Sachverhalten, die für die Schüler unmittelbar einsichtig sind, Zurückhaltung geboten, zumal wenn es sich um technische und wenig übersichtliche Beweise handelt. Es ist weit fruchtbringender, solche Sätze zu beweisen, bei denen der Beweis zum Verständnis des bewiesenen Sachverhaltes beiträgt. Plausibilitätsbetrachtungen sind ein legitimes Unterrichtsmittel, nicht nur wenn es um heuristische Betrachtungen geht (z. B. zur Vorklärung von Sachverhalten, wie etwa bei der Hinführung zur Kettenregel unten im Abschnitt "Analysis"), sondern auch dann, wenn in der exakten Begründung Lücken gelassen werden. Selbstverständlich müssen Plausibilitätsbetrachtungen als solche gekennzeichnet werden. Dabei hängt es von der Altersstufe ab, wie sehr man fehlende Exaktheit verdeutlichen oder wie weit man den Schülern verständlich machen kann, daß zum Beweis eines Satzes, dessen Inhalt durch eine Plausibilitätsbetrachtung vorbereitet wurde, eventuell ganz andere Wege eingeschlagen werden müssen.

Das Bestreben, den Mathematikunterricht auf eine präzise begriffliche Grundlage zu stellen, hat zuweilen dazu geführt, daß sich "Mengenlehre" und "Logik" so zu eigenen Unterrichtsgebieten verselbständigt haben, daß vor der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten die Beschäftigung mit inhaltsleeren Formalismen steht. Dadurch wird das jeweilige Vorverständnis der Schüler ignoriert statt pädagogisch genützt. Solche Fehlentwicklungen können jede sinnvolle Reform des Mathematikunterrichts zum Scheitern bringen. Die DMV lehnt selbständige Unterrichtseinheiten in Mengenlehre, Logik und Boolescher Algebra für den Kern des Mathematikunterrichts ab. Sie fordert stattdessen, daß die für den gesamten Mathematikunterricht wesentlichen Teile dieser Gebiete an Hand von konkreten mathematischen Sachverhalten dort behandelt werden, wo sie benötigt werden, und daß sie danach in einer der Altersstufe angemessenen Weise fortlaufend geübt und präzisiert werden. Dazu gehört unter anderem die deutliche Unterscheidung von Satz und Definition, von Voraussetzung und Behauptung, von notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die Verneinung (zusammengesetzter) Aussagen sowie das Umgehen mit Implikationen in verschiedenen sprachlichen Wendungen. Es ist aber nicht nötig, die konkret gebrauchten Schlußweisen formal zu isolieren, sie zu benennen und daran die Terminologie und Schreibweise der mathematischen Logik zu entwickeln. Viel wichtiger ist es, daß der Schüler sich in seinen eigenen Worten klar auszudrücken weiß, als daß er formalisierte Schreib- und Sprechweisen mechanisch handhaben kann.

In den Kern des Mathematikunterrichts sollen nur Sachverhalte und Begriffe aufgenommen werden, die an genügend vielen Beispielen vorbereitet und abgegrenzt werden können, für den weiteren Verlauf des Mathematikunterrichts eine wichtige Rolle spielen oder wesentlich zur Klarheit und Übersichtlichkeit des Unterrichtsstoffes beitragen. "Modernisierung" des Mathematikunterrichts darf nicht dahingehend mißverstanden werden, daß mathematische Sachverhalte und Begriffe aus der Fachwissenschaft in den Schulstoff übernommen werden, ohne daß ihre Leistungsfähigkeit dort sichtbar wird.

Neue Bezeichnungen sollten im Unterricht nur dann eingeführt werden, wenn dadurch eine wesentliche Vereinfachung der Sprechweise über eine längere Zeit hinweg erreicht wird. Es muß der Tendenz entgegengewirkt werden, daß fortlaufend neue Begriffe und Bezeichnungen eingeführt werden, die unnötig und unmotiviert sind und darüberhinaus den mathematischen Inhalt zu ersticken drohen. Dies gilt nicht nur für Bezeichnungen, die aus der Fachsprache stammen, sondern erst recht für solche, die nur in der Schule üblich sind. Autoren, Herausgeber und Rezensenten von Schulbüchern sollten vor der Einführung neuer Begriffe und Bezeichnungen überprüfen, in welchem Umfang diese im weiteren Unterricht benutzt werden und ob sie das Verständnis erleichtern oder erschweren. Sinnvoll und notwendig ist es aber, die mathematische Fachsprache, also auch die Mengensprechweise, überall dort zu verwenden, wo sie es ermöglicht, mathematische Sachverhalte übersichtlicher und prägnanter zu formulieren, als es die Umgangssprache erlaubt.

Die Beschäftigung mit abstrakten mathematischen Strukturen dient nicht nur dazu, die Vielzahl mathematischer Objekte und Ergebnisse zu ordnen, sondern auch dazu, neue Erkenntnisse für die Lösung konkreter Probleme zu liefern. Die Schüler sollten auch diesen Aspekt der Mathematik im Unterricht kennenlernen. Strukturelle Zusammenhänge sollten bei der Behandlung konkreter mathematischer Sachverhalte in den verschiedenen Schulstufen und in verschiedenen Unterrichtsgebieten herausgearbeitet werden (vgl. etwa die Hinweise zur Linearität im folgenden Teil dieser Denkschrift). Die Schüler lernen dadurch strukturelle Beziehungen kennen, ohne daß vorab eine explizite Behandlung der zugrunde liegenden abstrakten Struktur (etwa des Vektorraumes) notwendig ist. Durch dieses Vorgehen werden die Schüler am ehesten in die Lage versetzt, bei neuen Problemstellungen selbständig schon bekannte Strukturen wiederzuentdecken und dann vertraute Methoden anzuwenden. Nur auf dieser Basis kann sich ein Verständnis dafür entwickeln, daß die Beschäftigung mit abstrakten mathematischen Strukturen sinnvoll ist. Außerdem ist das Erkennen und Ausnutzen struktureller Beziehungen wichtiger (und anspruchsvoller) als das Führen von Beweisen in einer axiomatisch vorgegebenen Struktur;

denn meistens können nur wenige und vielfach triviale Folgerungen aus den Axiomen vorgeführt werden, die für die den Schülern geläufigen Beispiele selten neue Erkenntnisse bringen. Durch eine an konkreten mathematischen Fragestellungen orientierte Beschäftigung mit strukturellen Zusammenhängen werden darüberhinaus Querverbindungen zwischen verschiedenen mathematischen Gebieten sichtbar. Das ist notwendig, damit Mathematik nicht als bloße Addition isolierter Teile erscheint.

Verständnis für mathematische Problemstellungen und Zusammenhänge kann nur erreicht werden, wenn auf jeder Schulstufe die in den vorangehenden Unterrichtsstufen entwickelten Techniken und Methoden sicher beherrscht werden. Gerade die fehlende Sicherheit in Kalkülen macht es dem Schüler oft unmöglich, der Entwicklung eines neuen mathematischen Gedankenganges zu folgen oder mathematische Methoden anzuwenden: ein Schüler, der z. B. mit Ungleichungen und Absolutbeträgen nicht sicher umgehen kann, wird im Unterricht in Analysis unnötige Schwierigkeiten haben und so nicht zu soliden Kenntnissen auf diesem Gebiet gelangen können.

Es muß unbedingt darauf geachtet werden, daß Schüler Mathematik nicht ausschließlich als "reine" Mathematik erfahren, sondern Verständnis für die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik entwickeln. Fragen aus Anwendungsbereichen können ein sinnvoller Einstieg in eine mathematische Theorie sein. Die Leistungsfähigkeit mathematischer Methoden muß auch bei außermathematischen Problemen gezeigt werden. Es ist eine Fehlentwicklung, wenn man in der Schule Mathematik auf formales Schließen und exaktes Beweisen reduziert und meint, zur Behandlung von numerischen Verfahren und Algorithmen neue Fächer wie "Angewandte Mathematik" oder "Informatik" schaffen zu müssen. Solche Verfahren müssen selbstverständlich bei jeder Behandlung konkreter mathematischer Situationen herangezogen werden.

Im Hinblick auf die große Bedeutung stochastischer Verfahren bei Entscheidungsfindungen oder bei Beobachtungsauswertungen begrüßt es die DMV, daß Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik an vielen Schulen als Lehrstoff angeboten wird. Ziel des Unterrichts sollte dabei sein, den Schülern Verständnis für Möglichkeiten und Grenzen stochastischer Verfahren zu vermitteln. Die DMV hält es für nötig, daß so verstandene Stochastik in den Kern des Mathematikunterrichtes eingefügt wird, sobald Lehrer-Ausbildung und -Fortbildung, fachliche und didaktische Überlegungen sowie hinreichende Schulerfahrungen dies möglich machen.

Beschreibung der Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten, die von jedem Abiturienten erwartet werden

Diese Zusammenstellung umfaßt Kernwissen, auf das keinesfalls verzichtet werden darf. Elementare Fertigkeiten werden mit aufgeführt, weil ohne sie mit anspruchsvolleren Methoden nicht gearbeitet werden kann. Die Aufzählung einzelner Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten darf nicht zu dem Mißverständnis verleiten, daß der Mathematikunterricht bloß aus deren Einübung besteht und sich in der Vermittlung isolierter Wissenselemente erschöpft; vielmehr müssen diese innerhalb sinnvoller Zusammenhänge und Problemstellungen erarbeitet werden.

Die hier zur Verdeutlichung der im Unterricht verfolgten Absichten genannten wenigen Beispiele sind natürlich nicht so gemeint, daß genau diese behandelt werden müßten.

Numerische Techniken

Rechnen mit

Brüchen (einschließlich Prozentrechnung), auch als Vorbereitung auf die Algebra,

Dezimalzahlen (einschl. Rundungsfehlerbetrachtung),

Potenzen (z. B. $\sqrt{1,6 \cdot 10^7} = \sqrt{16 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^3$), sowohl aus praktischen Gründen als auch zur Vorbereitung der Exponentialfunktionen.

Umgang mit Rechenhilfsmitteln

(Taschenrechner, Rechenstab oder Funktionentafeln),

Sicherheit bei Überschlagsrechnungen.

Einfache Gleichungen und Ungleichungen

Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit zwei und drei Variablen ebenso wie das Auflösen einfacher Gleichungen - wie etwa $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ (Linsenformel) oder $s = \frac{1}{2} gt^2$ (beschleunigte Bewegung) - nach jeder darin vorkommenden Variablen.

Solche Gleichungen müssen auch dann noch sicher und bis zum numerischen Endresultat bearbeitet werden können, wenn die Variablen einmal s und t statt x und y heißen oder wenn dimensionierte Größen vorkommen.

Quadratische Gleichungen

Wegen der Bedeutung der quadratischen Funktionen kommt es nicht nur auf die Lösungsformel der quadratischen Gleichungen an, sondern ebenso darauf, daß z. B. die Umformung

$$x^2 + 4,8x + 5,35 = (x + 2,4)^2 - 0,41$$

Lage und Größe des Minimums der entsprechenden Funktion zeigt, während man aus der Produktdarstellung

$$(x + 2,4 + \sqrt{0,41}) \cdot (x + 2,4 - \sqrt{0,41})$$

sieht, wo die Funktion Nullstellen und wo sie positive bzw. negative Werte hat.

Addition und Multiplikation von Ungleichungen, Rechnen mit Beträgen (z. B. $a^2 < 25 \Leftrightarrow |a| < 5 \Leftrightarrow -5 < a < 5$), einfache Abschätzungen (z. B. $2 < \sqrt[3]{16} < 3$, weil $8 < 16 < 27$).

Graphische Darstellungen

Rechentechniken bzw. Lösungsverfahren sollten von Anfang an graphisch veranschaulicht werden (Dreisatz, Interpolation, lineare Gleichungen und Systeme, quadratische Gleichungen).

Eigenschaften graphisch gegebener Funktionen (Weg-Zeit-Diagramme, statistische Beschreibungen, Kostenentwicklungen, Wachstums- und Schwingungskurven, Meßreihen) müssen mit Worten beschrieben und qualitativ diskutiert werden können (z. B. wachsend, immer schwächer wachsend, periodisch schwankend, sich beliebig gut einer Konstanten nähernd, ...). Es ist sehr wichtig, daß man derartige qualitative Aussagen schon frühzeitig und ohne den Begriffsaufwand der Analysis machen kann.

Graphische Darstellungen mit nichtlinearen (z.B. logarithmischen) Skalen, die in Anwendungen häufig auftreten, müssen interpretiert werden können. Dadurch wird auch das Verständnis des Funktionsbegriffs gefördert.

Graphische Darstellungen gehören auch zur Einübung des Umgangs mit Ungleichungen und Absolutbeträgen (z.B. Durchschnitt der Lösungsmengen einfacher Ungleichungen, konvexe Polygone als Lösungsmengen linearer Ungleichungssysteme).

Grundkenntnisse in Geometrie

Verständnis für mathematische Beweise zu erreichen, ist eine zentrale Aufgabe des Mathematikunterrichts. Nach den elementaren Teilbarkeitsregeln ist die Mittelstufengeometrie ein anderes günstiges Übungsfeld. Hier wird jedoch nicht einer weitgehend axiomatischen Behandlung das Wort geredet. Man braucht keine explizite Axiomatik, um beispielsweise den Satz von Thales oder Schnittpunktsätze an Parallelogramm und Dreieck aus Symmetrieeigenschaften zu folgern ("lokales Ordnen").

Vor Beginn der Oberstufe muß aus der Geometrie folgendes bekannt sein:

Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen als Isometrien der Ebene, Kongruenzsätze, Satzgruppe des Pythagoras, und zwar nicht nur als Aussagen über Flächeninhalte, sondern auch zur Berechnung von Abständen (Grundlage der metrischen analytischen Geometrie).

Zentrische Streckungen und Ähnlichkeitssätze.

Winkelfunktionen (am Kreis), Sinus- und Kosinussatz.

Umfang, Flächeninhalt bzw. Volumen einfacher Figuren, Änderung ihrer Maßzahlen bei zentrischen Streckungen.

Bei der Behandlung von Umfang und Fläche eines Kreises wird auch der Grenzwertbegriff vorbereitet.
Die Betrachtung räumlicher Gebilde ist nicht nur aus praktischen Gründen notwendig; sie dient auch der Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens.

Formale Fertigkeiten

Die früher Buchstabenrechnung, heute Termumformungen genannten notwendigen Techniken erfordern ausreichende Übung. Das Hantieren mit den obenangeführten einfachen Gleichungen darf nicht durch einen aufgeblähten Begriffsapparat (etwa mit rekursiver Definition von "Termen") erschwert werden. Das notwendige Ausmaß dieser formalen Fertigkeiten läßt sich nicht genau beschreiben; ein wesentliches Kriterium dafür ist aber jedenfalls, daß begriffliche Schwierigkeiten des Oberstufenstoffes nicht durch mangelnde Rechenfertigkeiten vergrößert werden dürfen.

Außer den bisher genannten einfachen Gleichungen muß ein Abiturient z.B. die folgenden Formeln (in ihrem Gültigkeitsbereich) beweisen und in beiden Richtungen zielstrebig für Umformungen benutzen können:

$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$$

Solche Zerlegungen werden später, etwa beim Differenzieren der Funktion $x \mapsto x^3$, benutzt. Bei größeren Exponenten ist die geometrische Reihe nützlich:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\,a^n\left(1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$$

Ihre Bedeutung kann nicht genügend betont werden; man denke etwa an Verzinsung, periodische Dezimalbrüche, Vorbereitung des Grenzwertbegriffs, Iterationsverfahren in der Analysis, usw.

Die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ist wohl jedem Schüler bekannt, er sollte jedoch auch Überschlagsrechnungen wie

$$1,03^2 \approx 1,06, \quad \text{also} \quad \sqrt{1,06} \approx 1,03$$

als Anwendung davon erkennen ($a \gg b$).

Eine Formel wie $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ sollte auch in der Gestalt

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

benutzt werden können, etwa beim Differenzieren der Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$.

Wichtige Eigenschaften der elementaren transzendenten Funktionen müssen geläufig sein, z. B.

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y,$$

$$x < y \Rightarrow a^x < a^y \text{ für } a > 1,$$

$$\log x + \log y = \log(xy),$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Dazu ist keine vollständige theoretische Behandlung dieser Funktionen erforderlich. Plausibilitätsargumente haben auch hier ihren Sinn, und es ist - wie in der Wissenschaft überhaupt - legitim und manchmal unumgänglich, Sachverhalte ohne Beweis mitzuteilen.

Lineare Algebra und Geometrie

Das Lösen linearer Gleichungssysteme ist eine Grundtechnik, die Abiturienten sicher beherrschen müssen. Linearkombinationen spielen in allen Anwendungen der linearen Algebra eine entscheidende Rolle, sie sollten schon in der Gleichungslehre betont werden (als eine Hinführung zum Begriff des Vektorraums). Zur Behandlung der Gleichungssysteme gehört deren geometrische Interpretation in Ebene und Raum, einerseits um eine anschauliche Vorstellung der Lösungsmengen zu geben, andererseits weil die analytische Beschreibung der Geometrie des Raumes (nicht nur der Ebene) ein selbständiges Unterrichtsziel ist. Dabei ist die geometrische Interpretation der Vektoren wichtig, die ja auch zu einem besseren Verständnis der Vektorrechnung beiträgt - jedoch ohne daß dadurch der Vektorbegriff einseitig auf gerichtete Strecken oder Pfeilklassen fixiert werden sollte.

Der Zusammenhang zwischen der Metrik des Raumes und dem Satz

des Pythagoras muß selbstverständlich bekannt sein. Bei der Lösung metrischer Aufgaben sollen sowohl die Linearitätseigenschaften des Skalarproduktes wie dessen geometrische Interpretation (Kosinussatz) verfügbar sein.

Schließlich sollte aus der analytischen Geometrie bekannt sein, daß die einfache lineare Abbildung $(x, y) \mapsto (ax, by)$ z. B. den Einheitskreis auf die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ abbildet. Beziehungen zwischen Geometrie und Analysis müssen hergestellt werden können.

Beispiele:
Die Ellipse in der Beschreibung als Kurve $t \mapsto (a \cdot \cos t, b \cdot \sin t)$ eignet sich zur Diskussion des Tangentenproblems in Geometrie und Analysis; oder: Nachweis geometrischer Eigenschaften der Graphen einfacher Funktionen, etwa Brennpunkt der Parabel $x \mapsto x^2$, Tangenten und Asymptoten der Hyperbel $x \mapsto 1/x$.

Analysis

Die wichtigste Aufgabe der Differentialrechnung ist es, den Begriff der Ableitung einzuführen und den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung klarzumachen. Das bedeutet nicht, daß schon zum Zeichnen des Graphen einfacher Funktionen ($x \mapsto (x-a)^2 + b$, $x \mapsto mx + \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{1+x}$) die Differentialrechnung bemüht werden muß; im Gegenteil, derartige Funktionen müssen vor dem Differenzieren bekannt sein (z. B. aus der Gleichungslehre) oder bei der Entwicklung der Ableitungsdefinition bekanntgemacht werden, damit der Zusammenhang zwischen f und f' an ihnen erläutert werden kann. Die Definition der Ableitung allgemeinerer Funktionen ist eng mit dem Grenzwertbegriff (für Folgen oder Funktionen) verbunden; für die genannten einfachen Funktionen führen jedoch bereits elementare Überlegungen zu einer eindeutigen Tangentendefinition, so daß auf diese Weise intuitive Grenzwertvorstellungen entwickelt werden können. Das Newtonverfahren, angewandt auf diese einfachen Funktionen, demonstriert die Nützlichkeit der Tangenten und ihre Approximationseigenschaft. Auch hier werden außer den numerischen Aspekten der Analysis intuitive Grenzwertvorstellungen geschult.

Unabhängig davon, wieviel Zeit auf die Grundlegung der Analysis verwandt werden kann, müssen jedenfalls die Differentiationsregeln (Linearität, d.h. $(\alpha\cdot f+\beta\cdot g)' = \alpha f' + \beta g'$, Kettenregel, Produktregel, Quotientenregel) und die Ableitung der rationalen Funktionen sowie der speziellen Funktionen $x \to \sqrt{x}$, sin, cos, exp, ln sicher beherrscht werden. Damit werden nicht Beweise all dieser Tatsachen gefordert; sie müssen jedoch wenigstens durch mathematische Plausibilitätsargumente verständlich gemacht werden. Dafür zwei Beispiele:

Die Sehnensteigung der Exponentialfunktion $x \mapsto 2^x$ ist im Intervall $[x, x+h]$ bei festem h proportional zu 2^x, nämlich

$$\frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = 2^x \cdot \frac{2^h - 1}{h}.$$

Daher ist plausibel, daß auch die Tangentensteigung bei x proportional zu 2^x ist.

Oder zur Kettenregel: Verkettung der affinen Funktionen

$l_i(x) = a_i + m_i \cdot x \quad (i = 1, 2)$ zeigt, daß die affine Funktion

$l_1 \circ l_2(x) = (a_1 + m \cdot a_2) + m_1 \cdot m_2 \cdot x$

die Steigung $m_1 \cdot m_2$ hat. Berücksichtigt man, wie gut Tangenten approximieren, so ist es plausibel, daß sich beim Verketten differenzierbarer Funktionen die Steigungen (genommen an den richtigen Stellen) multiplizieren:

$$(f_1 \circ f_2)'(x) = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x).$$

Auch hier ist es also wichtig, daß mathematische Tatsachen ohne ihren vollständigen Beweis verständlich gemacht werden können.

Das Verständnis des Zusammenhangs zwischen f und f'

wird gefördert durch die Interpretation von f' als Geschwindigkeit, von f'/f als Wachstumsrate;

zeigt sich z.B. bei der Diskussion graphisch gegebener Funktionen (genauer als in der Mittelstufe - etwa: zu einer gegebenen Funktion f sind Funktionen zu skizzieren, die ungefähr wie die Ableitung bzw. wie eine Stammfunktion von f aussehen);

besitzt als quantitative Grundlage den Schrankensatz: Ist f differenzierbar und gilt

$m \leq f'(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$, so ist

$m \cdot (b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M \cdot (b - a)$.

Als unmittelbare Anwendung müssen Extremwertaufgaben aus Geometrie, Physik oder Wirtschaftswissenschaften gelöst werden können.

Auch die Grundzüge der Integralrechnung gehören zum Kern des Mathematikunterrichts. Ihre Behandlung wird zeitlich möglich, wenn die Differentialrechnung in der skizzierten Weise konzentriert wird. Ein Teil der Integralrechnung ist Folge des Schrankensatzes: Stammfunktionen F zu f (d.h. $F' = f$) sind bis auf eine additive Konstante bestimmt (denn $F' = 0$ impliziert F = konst).

Anwendungsbeispiele:

Die Wachstumsrate $\alpha = \frac{\dot{f}(t)}{f(t)}$ impliziert das Wachstumsgesetz $f(t) = f(0) \cdot e^{\alpha t}$.

Anfangspunkt $f(0) = 0$, Anfangsgeschwindigkeit $v = \dot{f}(0)$ und konstante Beschleunigung $-g = \ddot{f}(t)$ ergeben das Bewegungsgesetz $f(t) = v \cdot t - \frac{1}{2} gt^2$.

Ferner betrifft die Integralrechnung den wichtigen Zusammenhang zwischen Stammfunktion und Flächeninhalt. Dieser Zusammenhang, für den es ja überzeugende Plausibilitätsargumente gibt, sollte keinem Abiturienten vorenthalten werden.

Diese Inhalte sind nicht austauschbar und nicht abwählbar. Sie sind größtenteils klassisch; unmodern jedoch können niemals Inhalte, sondern nur Betrachtungsweisen sein. Die hier geschilderten Betrachtungsweisen verhindern, daß die Forderung nach ständiger Verfügbarkeit elementarer Kenntnisse zu gedankenlosem Drill führt. Unterricht braucht nicht unexakt zu sein, wenn er Beweislücken läßt, und er ist nicht notwendig unwissenschaftlich, wenn er zeigt, daß Mathematik nützlich und interessant ist.

Forderungen, die überall erfüllt sind, brauchen nicht erhoben zu werden. Die vorliegenden Forderungen sind nicht erfüllt, obgleich sie - noch - von manchen Richtlinien gedeckt werden. Offenbar ist ein Umdenken in Schule, Schulbüchern und Schulplanung, sind Verbesserungen in der Lehrer-Ausbildung und -Fortbildung notwendig, damit der Mathematikunterricht das hier formulierte Kernwissen vermitteln kann.

Professor Dr. Heinz Bauer
Vorsitzender der DMV
Mathematisches Institut der Universität

852 Erlangen

Bezug dieser Denkschrift durch:

Mathematisches Forschungsinstitut,
Geschäftsstelle: Albertstr. 24, 7800 Freiburg