Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Wintersemester 2022/2023

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1 Sei G eine kompakte topologische Gruppe mit Haar-Maß dg, $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Hilbert-Raum und $(\pi, (\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle))$ eine stetige Darstellung von G auf $\mathcal{H}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Vorschrift

$$\langle v, w\rangle_G := \int_G \langle \pi(g)v, \pi(g)w\rangle dg \qquad (v, w \in \mathcal{H})$$

ein G-invariantes inneres Produkt auf $\mathcal{H}$ definiert.

(ii) Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass

$$C^{-1}\langle v, v\rangle \leq \langle v, v\rangle_G \leq C\langle v, v\rangle$$

für alle $v \in \mathcal{H}$ gilt. Inbesondere induzieren damit $\langle\ ,\ \rangle$ und $\langle\ ,\ \rangle_G$ dieselbe Topologie auf $\mathcal{H}$.

(iii) Zeigen Sie, dass $(\pi, (\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle_G))$ eine unitäre Darstellung von G ist, die äquivalent zu $(\pi, (\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle))$ ist.

Aufgabe 2.2

(i) Zeigen Sie, dass $K = SO(2)$ eine maximale kompakte Untergruppe von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ist, d.h. ist $H \supseteq K$ eine weitere kompakte Untergruppe von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, so gilt bereits $H = K$.

(ii) Zeigen Sie, dass alle maximal kompakten Untergruppen von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ zueinander konjugiert sind.

(iii) Zeigen Sie, dass alle endlichen Untergruppen von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ abelsch sind.

Aufgabe 2.3 Sei $(\pi, \mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle))$ eine irreduzible unitäre Hilbert-Darstellung einer lokalkompakten Gruppe G, $0 \neq \mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}$ ein G-invarianter Teilraum und $\langle\ ,\ \rangle_0$ eine G-invariante positiv semidefinite hermitesche Form auf $\mathcal{H}_0$.

Zeigen Sie, dass ein $c \geq 0$ existiert mit

$$\langle\ ,\ \rangle_0 = c\langle\ ,\ \rangle|_{\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0}.$$

Aufgabe 2.4 Sei L die linksreguläre Darstellung von $(\mathbb{R}, +)$ auf $L^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass ein $f \in L^2(\mathbb{R})$ genau dann zyklisch für L ist, wenn $\hat{f} \neq 0$ fast überall gilt.

Insbesondere ist damit $e^{-\alpha x^2}$ für alle $\alpha > 0$ zyklisch.

Aufgabe 2.5 Zeigen Sie, dass $\widehat{\mathbb{S}^1} \cong \mathbb{Z}$ gilt.