Universität Paderborn Wintersemester 2022/2023
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

3. Übungsblatt

Ziel dieses Übungsblatts ist, es den Satz von Peter und Weyl für eine beliebige kompakte topologische Gruppe K zu beweisen. Im folgenden sei $\hat{K}_{fin}$ die Menge der Äquivalenzklassen endlich dimensionaler irreduzibler unitärer Darstellungen von K und dk das normierte Haarmaß.

Aufgabe 3.1 Schur-Orthogonalitätsrelationen

(i) Seien $(\pi, V), (\pi', V') \in \hat{K}_{fin}$ **nicht** äquivalent. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_K \langle \pi(k)u, v\rangle \overline{\langle \pi'(k)u', v'\rangle} dk = 0$$

für alle $u, v \in V$ und alle $u', v' \in V'$ gilt.

(ii) Sei $(\pi, V) \in \hat{K}_{fin}$. Zeigen Sie die Identität

$$\int_K \langle \pi(k)u_1, v_1\rangle \overline{\langle \pi(k)u_2, v_2\rangle} dk = \frac{\langle u_1, u_2\rangle \overline{\langle v_1, v_2\rangle}}{\dim V}$$

für alle u_1, v_1, u_2, v_2.

Aufgabe 3.2 Für $\pi \in \hat{K}_{fin}$ und $v, w \in V_\pi$ sei $m^\pi_{v,w} : K \to \mathbb{C}, k \mapsto \langle \pi(k^{-1})v, w\rangle$ und $M_\pi := \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(\{m^\pi_{v,w} : v, w \in V_\pi\})$.

(i) Zeigen Sie, dass M_π für jedes $(\pi, V_\pi) \in \hat{K}_{fin}$ ein endlich dimensionaler Unterraum von $L^2(K)$ ist, der invariant unter der Links - und Rechtsregulären Darstellung ist. Zeigen Sie zudem

$$L|_{M_\pi} \cong \bigoplus_{j=1}^{\dim V_\pi} \pi =: \dim(V_\pi) \cdot \pi.$$

(ii) Sei $M := \bigoplus_{\pi \in \hat{K}_{fin}} M_\pi$. Zeigen Sie, dass M dicht in $L^2(K)$ ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $M^\perp \neq 0$. Zeigen Sie zuerst, dass in $M^\perp$ eine von Null verschiedene stetige Funktion f liegt. Zeigen Sie anschließend, dass man f, so wählen kann, dass $f(1) > 0$, $f(kxk^{-1}) = f(x)$ und $f(x) = \overline{f(x^{-1})}$ für alle $k, x \in K$ gilt. Sei $h(x, y) := f(x^{-1}y)$ für $x, y \in K$. Machen Sie sich klar, dass die Vorschrift $T_h(g)(x) := \int_K h(x, k)g(k)dk$ einen von Null verschiedenen selbstadjungierten Hilbert-Schmidt Operator $L^2(K) \Rightarrow L^2(K)$ definiert. Dieser hat einen reellen von Null verschiedenen Eigenwert λ mit endlich dimensionalem Eigenraum $0 \neq V_\lambda \subset L^2(K)$. Zeigen Sie, dass V_λ invariant unter der linksregulären Darstellung ist und führen Sie dies zu einem Widerspruch.

(iii) Folgern Sie, dass

$$(L, L^2(K)) \cong \widehat{\bigoplus}_{\pi \in \hat{K}_{fin}} \dim(V_\pi) \cdot \pi$$

gilt.

Aufgabe 3.3 Zeigen Sie, dass jede irreduzible unitäre Darstellung von K endlich dimensional ist.