Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Wintersemester 2022/2023

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale Lie-Algebra.

(i) Zeigen Sie: Ist $\delta \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ eine Derivation der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so gilt $e^\delta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

(ii) Zeigen Sie: Ist $\delta \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ ein Endomorphismus von Lie-Algebren mit $e^{t\delta} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so gilt $\delta \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

Aufgabe 4.2 Die komplexe Lie-Gruppe $\mathrm{SO}(3,\mathbb{C})$ operiert auf $\mathbb{C}^3$ durch Matrixvektormultiplikation. Damit operiert $\mathrm{SO}(3,\mathbb{C})$ auch auf $\mathbb{C}[z_1,z_2,z_3]$.
Sei $\mathbb{C}[z_1,z_2,z_3]^{\mathrm{SO}(3,\mathbb{C})}$ die Algebra der $\mathrm{SO}(3,\mathbb{C})$ invarianten Polynome auf $\mathbb{C}^3$ und $\omega := z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \in \mathbb{C}[z_1,z_2,z_3]$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{C}[z_1,z_2,z_3]^{\mathrm{SO}(3,\mathbb{C})} = \mathbb{C}[\omega].$$

Aufgabe 4.3 Zeigen Sie: $\mathrm{sl}(n,\mathbb{R})$ ist halbeinfach für jedes $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Killing-Form B von $\mathrm{sl}(n,\mathbb{R})$ ist nicht ausgeartet. Zeigen Sie hierfür:

$$B(X,Y) = c_n \mathrm{tr}(XY)$$

für alle $X, Y \in \mathrm{sl}(n,\mathbb{R})$ und eine Konstante $c_n \in \mathbb{R}$. Berechen Sie zudem die Konstante c_n explizit.

Aufgabe 4.4

(i) Zeigen Sie, dass $\mathrm{so}(3,\mathbb{C})$ als Lie-Algebra isomorph zu $(\mathbb{C}^3, \times)$ ist, wobei $\times$ das Kreuzprodukt bezeichnet.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ als Lie-Algebra isomorph zu $\mathrm{so}(3,\mathbb{C})$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SU}(2)$ eine doppelte Überlagerung von $\mathrm{SO}(3)$ ist.

(iv) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ eine doppelte Überlagerung von $\mathrm{SO}(3,\mathbb{C})$ ist.