Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Wintersemester 2022/2023

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Seien $h, e^+, e^- \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ mit

$$[h, e^+] = 2e^+, [h, e^-] = -2e^-, [e^+, e^-] = h.$$

(In der Literatur werden Tripel der Form (h, e^+, e^-) mit den oben genannten Relationen sl_2-Tripel genannt). Zeigen Sie, dass für $X, Y \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die folgenden Identitäten in $\mathcal{U}(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}))$ gelten:

(a) $[X^n, Y] = \sum_{j=0}^{n-1} X^j[X,Y]X^{n-j-1}$

(b) $[h, (e^\pm)^n] = \pm 2n(e^\pm)^n$

(c) $[(e^+)^n, e^-] = n(e^+)^{n-1}(h + n - 1)$

(d) $[e^+, (e^-)^n] = n(e^-)^{n-1}(h - n + 1)$

Aufgabe 5.2 Sei (π, V) eine nicht triviale endlichdimensionale Darstellung von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass ein $0 \neq v \in V$ und ein Charakter $\lambda : AN \to \mathbb{C}^\times$ mit $\lambda(N) = 1$ existiert, sodass $\pi(an)v = \lambda(an)v = \lambda(a)v$ für alle $an \in AN$ gilt. Insbesondere folgt $V^N \neq 0$ für jede nicht triviale endlichdimensionale Darstellung von G.

(Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass es einen gemeinsamen N Eigenvektor v gibt, mit zugehörigem Charakter $\mu : N \to \mathbb{C}^\times$. Zeigen Sie danach, dass $\pi(a)V(\mu) \subset V(\mu^a)$ für alle $a \in A$ gilt, wobei $\mu^a : N \to \mathbb{C}^\times, n \mapsto \mu(a^{-1}na)$.)

(b) Sei π irreduzibel und $0 \neq v \in V$ ein gemeinsamer AN Eigenvektor. Zeigen Sie, dass v K-zyklisch ist.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (b), dass für irreduzibles π die K-Typen höchstens von Dimension eins sind.

Aufgabe 5.3

(a) Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich dimensionale reelle Lie-Algebra. Zeigen Sie, dass ein eindeutiger antilinearer Antialgebrenisomorphismus

$$^* : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}), D \mapsto D^*$$

existiert mit $X^* = -X$ für alle $X \in \mathfrak{g}$.

(b) Sei π eine unitäre Darstellung einer Lie-Gruppe G mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\langle d\pi(D)v, w\rangle = \langle v, d\pi(D^*)w\rangle$$

für alle $v, w \in V^\infty$ und alle $D \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ gilt.