Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Wintersemester 2022/2023

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe und (π, V) eine endlichdimensionale Darstellung von G. Zeigen Sie, dass π genau dann irreduzibel ist, wenn die abgeleitete Darstellung $d\pi$ von $\mathfrak{g}$ irreduzibel ist.

Aufgabe 6.2 Sei $m \in \mathbb{N}$, $n = m - 1$, V_n der komplexe Vektorraum der komplexwertigen homogenen Polynomfunktionen in zwei Variablen von Grad n, und $\Phi_n : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(V_n)$ die Darstellung gegeben durch

$$\Phi(A)(P)(z) := P(A^{-1}z),$$

wobei $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}), P \in V_n$ und $z \in \mathbb{C}^2$.

(i) Sei H, E, F das Standard sl_2 Tripel. Zeigen Sie, dass für die abgeleitete Darstellung $d\Phi_n$ gilt:

$$\begin{aligned} d\Phi_n(H)(P) &= (z_2\partial_{z_2} - z_1\partial_{z_1})(P) \\ d\Phi_n(E)(P) &= -z_2\partial_{z_1}(P) \\ d\Phi_n(F)(P) &= -z_1\partial_{z_2}(P) \end{aligned}$$

für alle $P \in V_n$.

(ii) Berechnen Sie die Eigenraumzerlegung von V_n bezüglich $d\Phi_n(H)$.

(iii) Zeigen Sie, dass Φ_n irreduzibel ist.

(iv) Sei $K = \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, $V_n^K = 0$ für n ungerade und $\dim V_n^K = 1$ für n gerade.

Aufgabe 6.3 Das Ziel dieser Aufgabe ist es die komplexen irreduziblen endlichdimensionalen Darstellungen von $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ zu klassifizieren.

Sei $H, E, F \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ das Standard sl_2 Tripel und (π, V) eine irreduzible Darstellung von $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ von Dimension $m \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass ein $0 \neq v_0 \in V$ und ein $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert, sodass $\pi(H)v_0 = \lambda v$ und $\pi(E)v_0 = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}(\overline{\mathfrak{n}})v_0 = V$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass eine Basis $v_0, \cdots, v_n$ von V existiert $(n \in \mathbb{N}_0)$ mit

  (i) $\pi(H)v_i = (\lambda - 2i)v_i$ für alle $0 \leq i \leq n$
  (ii) $\pi(E)v_0 = 0$
  (iii) $\pi(F)v_i = v_{i+1}$ mit $v_{n+1} := 0$ für alle $0 \leq i \leq n$
  (iv) $\pi(e)v_i = i(n - i + 1)v_{i-1}$ mit $v_{-1} := 0$ für alle $0 \leq i \leq n$.

(d) Zeigen Sie, dass $\lambda = m-1$ gilt, indem Sie den Casimir Operator $\mathcal{C} \in \mathcal{U}(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}))$ auf v_0 und v_n anwenden.

(e) Zeigen Sie mit Hilfe von (c), (d) und Aufgabe 6.2, dass die irreduziblen endlich dimensionalen Darstellungen von $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ bis auf Äquivalenz gegeben sind durch $\{\Phi_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(f) Erklären Sie, weshalb die obige Klassifikation auch zur Klassifikation der irreduziblen komplexen endlichdimensionalen Darstellungen von

$$\mathrm{su}(2), \mathrm{sl}(2,\mathbb{R}), \mathrm{SU}(2), \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \text{ und } \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$$

führt.