Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Wintersemester 2022/2023

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1

(i) Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich dimensionale komplexe Lie-Algebra, M ein $\mathfrak{g}$-Modul und M^* der algebraische Dualraum von M. Zeigen Sie, dass die Vorschrift

$$(X.\alpha)(v) := -\alpha(X.v) \qquad (\alpha \in M^*, v \in M)$$

den algebraischen Dual zu einem $\mathfrak{g}$-Modul macht.

Zeigen Sie zudem, dass jeder Lie-Algebrenhomomorphismus $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ via $X_\circ v := \phi(X).v$ eine neue $\mathfrak{g}$-Modulstruktur auf M definiert. Der zugehörige Modul wird mit M^ϕ bezeichnet.

(ii) Von nun an sei $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, h, e, f ein sl_2 Tripel und M ein $\mathfrak{g}$-Modul. Für $\mu \in \mathbb{C}$ sei $M_\mu := \{v \in M : h.v = \lambda v\}$ und $M^{\mathfrak{g}-fin} := \bigoplus_{\mu\in\mathbb{C}} M_\mu \subset M$. Zeigen Sie, dass $M^{\mathfrak{g}-fin}$ ein $\mathfrak{g}$-Untermodul ist.

Für einen $\mathfrak{g}$-Modul M definieren wir den kontragradienten Modul von M als

$$M^\vee := (M^*)^{\mathfrak{g}-fin}.$$

Ist M ein $\mathfrak{g}$-Modul mit $M = M^{\mathfrak{g}-fin}$, so schreiben wir $\mathrm{Spec}(M) := \{\mu \in \mathbb{C} : M_\mu \neq 0\}$ für das Spektrum von M und $d(M,\mu) := \dim(M_\mu)$ für $\mu \in \mathbb{C}$.

(iii) Sei $M = M^{\mathfrak{g}-fin}$ und $\dim(M,\mu) < \infty$ für alle $\mu \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\dim(M^\vee, -\mu) = \dim(M,\mu)$ für alle $\mu \in \mathbb{C}$ und damit insbesondere $\mathrm{Spec}(M^\vee) = -\mathrm{Spec}(M)$ gilt.

(iv) Sei M wie in (iii). Zeigen Sie, dass M als $\mathfrak{g}$-Modul kanonisch isomorph zu $(M^\vee)^\vee$ ist.

Sei M nun ein Modul mit höchstem Gewicht $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h. es existiert ein $v_\lambda \in M$ mit $h.v_\lambda = \lambda v_\lambda$, $ev_\lambda = 0$ und $\mathcal{U}(\overline{\mathfrak{n}})v_\lambda = M$.

(v) Zeigen Sie, dass $M = M^{\mathfrak{g}-fin}$ mit $d(M,\mu) \leq 1$ für alle $\mu \in \mathbb{C}$ und entweder $\mathrm{Spec}(M) = \lambda - 2\mathbb{N}_0$ oder $\mathrm{Spec}(M) = \{\lambda, \lambda-2, \cdots, -\lambda+2, -\lambda\}$ gilt.

(vi) Sei $\Theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, X \mapsto -X^t$ die Cartan-Involution. Zeigen Sie die Äquivalenzen

$$M \text{ irreduzibel} \iff M^{\vee,\Theta} \text{ irreduzibel} \iff M^\vee \text{ irreduzibel.}$$

(vii) Zeigen Sie, dass das Verma-Modul

$$M(\lambda) := \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}v_{\lambda-1}$$

mit höchstem Gewicht $\lambda - 1 \in \mathbb{C}$ genau dann irreduzibel ist, falls $\lambda \notin \mathbb{N}$.

(viii) Zeigen Sie, dass für $\lambda \notin \mathbb{N}$

$$M(\lambda) \cong M(\lambda)^{\vee,\Theta}$$

und für $\lambda \in \mathbb{N}$

$$M(-\lambda) \subset M(\lambda),\ F(\lambda) \subset M(\lambda)^{\vee,\Theta},$$

wobei $F(\lambda)$ die irreduzible Darstellung von Dimension λ bezeichnet.

(ix) Zeigen Sie für $\lambda \in \mathbb{N}$ die Existenz der $\mathfrak{g}$-äquivarianten exakten Sequenzen

$$0 \to M(-\lambda) \to M(\lambda) \to F(\lambda) \to 0$$

und

$$0 \to F(\lambda) \to M(\lambda)^{\vee,\Theta} \to M(-\lambda) \to 0$$

und beweisen Sie, dass die Sequenzen nicht spalten.