Universität Paderborn Wintersemester 2022/2023
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1

(i) Für $\mu \in \mathbb{C}$ bezeichne $V_\mu = \mathcal{H}_{1,\mu,K} = \mathbb{C}[\mathbb{S}^1]_{even}$ die K-endlichen Vektoren der Hauptseriendarstellung $\mathcal{H}_{1,\mu}$ von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Aus der Klassifikation der irreduziblen Harish-Chandra Moduln ist bekannt, dass für $\lambda \notin 2\mathbb{Z}+1$

$$I_\lambda : V_\lambda \to V_{-\lambda}$$

mit $I_\lambda(e^n v_0) := e^n v_0'$ und $I_\lambda(f^n v_0) := f^n v_0'$ einen $\mathfrak{sl}_2$ äquivarianten Isomorphismus definiert. Hierbei bezeichnet v_0 bzw. v_0' einen normierten Erzeuger des nullten K-Isotyps von V_λ bzw. $V_{-\lambda}$ und e und f sind Elemente des $\mathfrak{sl}_2$ Tripels

$$h = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, e = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}, f = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{pmatrix},$$

Wiederholen Sie den Beweis dieser Aussage.

(ii) Sei $(\ ,\ ) : V_\lambda \times V_{-\lambda} \to \mathbb{C}$ die natürliche Paarung aus Aufgabe 9.2. Zeigen Sie, dass für $\lambda \in (0,1)$

$$\langle\ ,\ \rangle : V_\lambda \times V_\lambda \to \mathbb{C}, (v,w) \mapsto (v, I(\overline{w}))$$

eine hermitesche Form auf V_λ definiert und $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ auf $(V_\lambda, \langle\ ,\ \rangle)$ durch schiefsymmetrische Operatoren operiert.

(iii) Es sei $\mathcal{H}_\lambda$ die Vervollständigung von V_λ bezüglich des inneren Produktes aus (ii). Zeigen Sie, dass $\Delta = \mathcal{C} + 2\Delta_K$ ein wesentlich selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}_\lambda$ ist. Verwenden Sie anschließend den Satz von Nelson (siehe zum Beispiel [Garth Warner, Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups 1, 4.4.6.6 S.297]) um eine unitäre Darstellung $(\eta_\lambda, \mathcal{H}_\lambda)$ von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ zu erhalten mit $(\eta_\lambda, \mathcal{H}_\lambda)_K = V_\lambda$. Zeigen Sie schließlich, dass $\mathcal{H}_{1,\lambda}$ infinitesimal äquivalent zur unitären Darstellung $(\eta_\lambda, \mathcal{H}_\lambda)$ ist für alle $\lambda \in (0,1)$. Die unitären Darstellungen $\{(\eta_\lambda, \mathcal{H}_\lambda) : \lambda \in (0,1)\}$ werden Nebenseriendarstellungen genannt.