Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Wintersemester 2022/2023

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

12. Übungsblatt

Aufgabe 12.1 Zeigen Sie, dass die Darstellungen der diskreten Serie $\{\mathcal{D}_n^{\pm} : n \in \mathbb{N}_{>1}\}$ quadratintegrierbar sind.

[Hinweis: Sei $A^+ := \left\{ a_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} : t \geq 0 \right\} \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Benutzten Sie die Integralformel der Zerlegung

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = KA^+K,$$

welche besagt, dass

$$\int_G f(g)dg = c \int_{K\times\mathbb{R}_{\geq 0}\times K} f(k_1 a_t k_2) \sinh(2t) dk_1 dt dk_2$$

für alle $f \in C_c(G)$ gilt. Hierbei bezeichnen dg und $dk_1 = dk_2$ Haar-Maße auf G beziehungsweise K und $c \in \mathbb{R}_{>0}$ eine positive Konstante.]

Aufgabe 12.2

(a) Sei G eine unimodulare Lie-Gruppe und $\pi \in \widehat{G}$ quadratintegrierbar. Zeigen Sie, dass eine positive Konstante $d(\pi) > 0$ existiert, sodass

$$\int_G \langle \pi(g)x, y\rangle \overline{\langle \pi(g)z, w\rangle} dg = \frac{1}{d(\pi)} \langle x, z\rangle \langle w, y\rangle$$

für alle $x, y, w, z \in V_\pi$. Die Konstante $d(\pi)$ wird **formaler Grad von** π genannt.

(b) Nach Aufgabe 12.1 sind die Darstellungen $\{\mathcal{D}_n^{\pm} : n \in \mathbb{N}_{>1}\}$ quadratintegrierbar. Berechnen Sie die formalen Grade der Darstellungen $\{\mathcal{D}_n^{\pm} : n \in \mathbb{N}_{>1}\}$.