Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Wintersemester 2022/2023

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1 Das Ziel dieser Aufgabe ist es, das Lemma von Schur in einer allgemeineren Form zu beweisen.

(a) Sei V ein Hilbertraum und $B \subseteq \mathrm{End}(H)$ eine beliebige Teilmenge der stetigen Endomorphismen $V \to V$. Man definiere

$$B' := \{X \in \mathrm{End}(V) : TX = XT \ \forall T \in B\}.$$

Sei B zusätzlich eine Unteralgebra von $\mathrm{End}(V)$ mit $1 \in B$ und $B = B^*$. Zeigen Sie, dass dann

$$(B')'v \subseteq \overline{Bv}$$

für alle $v \in V$ gilt. (Hinweis: Betrachten Sie die orthogonale Projektion P auf $\overline{Bv}$.)

(b) Sei nun (π, V) eine irreduzible unitäre Darstellung einer lokalkompakten Gruppe G. Sei $D \subseteq V$ ein dichter G-invarianter Unterraum von V und $T : D \to V$ linear mit $T\pi(g)v = \pi(g)Tv$ für alle $v \in D$. Nehmen Sie zudem an, dass ein dichter Unterraum $D' \subseteq V$ und eine lineare Abbildung $S : D' \to V$ existiert mit

$$\langle Tv, w\rangle = \langle v, Sw\rangle$$

für alle $v \in D, w \in D'$.

Zeigen Sie, dass $T = \lambda \mathrm{Id}|_D$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt.

(Hinweis: Sei A die Unteralgebra von $\mathrm{End}(V)$ die von $\pi(G)$ erzeugt wird. Zeigen Sie zuerst, dass zu $x, y \in V, X \in \mathrm{End}(V)$ und $\delta > 0$ immer ein $U \in A$ existiert, sodass

$$\|Ux - Xx\| < \delta \qquad \|Uy - Xy\| < \delta.$$

Hierzu betrachten Sie die Algebra $B := \{U \oplus U : U \in A\} \subset \mathrm{End}(V \oplus V)$, berechnen $(B')'$ und wenden Teil (a) an. Zeigen Sie anschließend, dass v und Tv für jedes $v \in D$ linear abhängig sein müssen und folgern Sie daraus (b).)

Aufgabe 7.2 Sei (π, V) eine irreduzible unitäre Darstellung einer Lie-Gruppe G. Zeigen Sie, dass ein Charakter $\chi : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ existiert, sodass

$$d\pi(Z)v = \chi(Z)v$$

für alle $Z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}), v \in V^\infty$ gilt. (Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 7.1 und benutzen Sie Aufgabe 5.3)