Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Wintersemester 2022/2023

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

8. Übungsblatt

Aufgabe 8.1 Sei G eine unimodulare lokalkompakte Gruppe und (π, H) eine unitäre irreduzible Darstellung. Für $v, w \in H$ sei $\pi_{v,w}$ der Matrixkoeffizient $g \mapsto \langle \pi(g)v, w\rangle$. (π, H) wird quadratintegrierbar genannt, falls **jeder** Matrixkoeffizient in $L^2(G)$ liegt.

(i) Zeigen Sie, dass (π, H) genau dann quadratintegrierbar ist, wenn $v, w \in H \setminus \{0\}$ existieren mit $\pi_{v,w} \in L^2(G)$.

(ii) Zeigen Sie zusätzlich, dass in diesem Fall eine G-invariante Isometrie $T : H \to L^2(G)$ existiert mit $\mathrm{Bild}(T) \subset L^2(G) \cap C(G)$.

(Hinweis: Fixieren Sie $v', w' \in H$ mit $\|v\| = \|w\| = 1$ und $\pi_{w',v'} \in L^2(G)$ und betrachten Sie den Raum $D := \{v \in H : \pi_{v,v'} \in L^2(G)\}$. Zeigen Sie zuerst, dass D dicht in H ist. Betrachten Sie als nächstes die Abbildung $\tilde{T} : D \to L^2(G), v \mapsto \pi_{v,v'}$ und das innere Produkt

$$\langle v, w\rangle_1 := \langle v, w\rangle + \langle \tilde{T}v, \tilde{T}w\rangle_{L^2(G)} \qquad (v, w \in D)$$

auf D. Zeigen Sie, dass D vollständig bezüglich $\langle\, ,\, \rangle_1$ ist und benutzen Sie die Irreduzibilität von π um $D = H$ und die Existenz einer G-invarianten Isometrie $T : H \to L^2(G)$ mit $\mathrm{Bild}(T) \subset L^2(G) \cap C(G)$ zu folgern.)

Aufgabe 8.2 Sei $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(2, \mathbb{R})$.

(i) Zeigen Sie, dass die Killing-Form κ von Signatur $(2, 1)$ ist.

(Hinweis: Betrachten Sie die Basis

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.)$$

Ein Element $X \in \mathfrak{g}$ wird elliptisch/hyperbolisch genannt, falls $\mathrm{ad}(X)$ über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist und nur imaginäre/reelle Eigenwerte besitzt.

(ii) Zeigen Sie, dass ein Element $0 \neq X \in \mathfrak{g}$ genau dann elliptisch/hyperbolisch ist, falls $\kappa(X, X) < 0$ bzw. $\kappa(X, X) > 0$ gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass ein Element $X \in \mathfrak{g}$ genau dann ad-nilpotent ist, wenn $\kappa(X, X) = 0$ gilt.

Es seien $\mathfrak{g}_{ell}, \mathfrak{g}_{hyp}$ und $\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}$ die Menge der elliptischen/hyperbolischen und ad-nilpotenten Elemente von $\mathfrak{g}$. Nach (ii) und (iii) ist $\mathfrak{g}$ die Vereinigung von $\mathfrak{g}_{ell}, \mathfrak{g}_{hyp}$ und $\mathcal{N}$.

(iv) Geben Sie alle $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-Orbiten in $\mathfrak{g}$ explizit an. (Hinweis:

$$\mathfrak{g}_{ell} \setminus \{0\} = \mathrm{Ad}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))\ \mathbb{R}^{\times} U$$

und

$$\mathfrak{g}_{hyp} \setminus \{0\} = \mathrm{Ad}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))\ \mathbb{R}_{>0} H.)$$

(v) Wieviele Zusammenhangskomponenten haben jeweils $\mathfrak{g}_{ell}, \mathfrak{g}_{hyp}$ und $\mathcal{N}$?