Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Wintersemester 2022/2023

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

9. Übungsblatt

Aufgabe 9.1 Sei G eine unimodulare Gruppe, E ein Banachraum und (π, E) eine stetige Darstellung von G auf E.

(i) Sei E' der topologische Dualraum von E. Zeigen Sie, dass die Vorschrift

$$\pi^t(g)(\alpha) := \alpha \circ \pi(g^{-1})$$

eine lineare Wirkung von G auf E' definiert.

(ii) Zeigen Sie, dass $\pi^t(\omega) \subset \mathcal{L}(E'_b, E'_b)$ gleichgradig stetig ist für jede kompakte Teilmenge $\omega \subset G$. Hierbei bezeichnet E'_b den Dualraum ausgestattet mit der starken Topologie oder äquivalenterweise mit der Operatornorm.

(iii) Sei $E^\vee \subset E'$ der Unterraum bestehend aus allen $\alpha \in E'$ für welche die Bahnabbildung $G \mapsto E'_b, g \mapsto \pi(g)^t\alpha$ stetig ist. Zeigen Sie, dass $E^\vee$ abgeschlossen in E'_b ist. Folgern Sie, dass

$$\pi^\vee : G \times E^\vee \to E^\vee, (g, \alpha) := \pi^t(\alpha)$$

eine stetige Darstellung definiert.

(iv) Zeigen Sie, dass $E^\vee$ schwach-$*$ dicht in E' ist.

(v) Zeigen Sie, dass für reflexives E immer $E^\vee = E'$ gilt.

(vi) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Darstellung (π, E) mit $E^\vee \neq E'$.

(Siehe [Garth Warner, Harmonic Analysis on semisimple Lie groups 1, 4.1.2 S.223] für den Fall, dass E nur lokal konvex ist.)

Aufgabe 9.2 Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\epsilon \in \{1, -1\}$. Zeigen Sie, dass $H^\vee_{\epsilon,\lambda} \cong H_{\epsilon,-\lambda}$ gilt.

(Hinweis: Betrachten Sie die natürliche Paarung $H_{\epsilon,\lambda} \times H_{\epsilon,-\lambda} \to \mathbb{C}$ und benutzen Sie die Integralformel

$$\int_K f(k)dk = \int_K f(\tilde{k}(kg))\tilde{a}(kg)^{2\rho}dk \qquad f \in C^\infty(K), g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),$$

wobei $\tilde{a}$ und $\tilde{k}$ die Iwasawa Projektionen auf A bzw. K bezüglich $G = ANK$ und ρ das Weyl-Element bezeichnen.

Aufgabe 9.3 Zeigen Sie, dass nicht jeder Gruppenhomomorphismus $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ stetig ist.